Multiplication et division égyptiennes

Introduction

La méthode utilisée par les Égyptiens est attestée par le papyrus de *Rhind* (vers 1600 avant J.-C) qui se réfère à des documents du *Moyen Empire* (environ 2000 ans avant J.-C). Les algorithmes de multiplication et de division sont suggérés par une liste de problèmes. Pour parodier *Napoléon*, ≪ *Du haut de ces algorithmes, 40 siècles vous contemplent !* ≫.
Dans cette présentation, la méthode sera réinterprétée dans un langage moderne. Les algorithmes sont exprimés en langage *Mathematica* et les idées guides sont formulées en commentant un exemple numérique.
Soit, par exemple, le produit 181×273 à effectuer. Une méthode consiste à exprimer le premier nombre en base 2 :

$$\begin{aligned} 181 \times 273 &= (128 + 32 + 16 + 4 + 1) \times 273 \\ &= 1 \times 273 + 4 \times 273 + 16 \times 273 + 32 \times 273 + 128 \times 273 \\ &= 273 + 2^2 \times 273 + 2^4 \times 273 + 2^5 \times 273 + 2^7 \times 273 \end{aligned}$$

Pour terminer le calcul, deux opérations arithmétiques suffisent : la multiplication de nombres par 2 et l'addition de nombres. En particulier, elle ne fait pas appel à des tables de multiplication.

Expression d'un entier en base 2

Pour convertir l'entier 181 en base 2, on peut procéder comme suit :

1-ère étape

- Dresser la liste des puissances de 2, tant qu'elles ne sont pas supérieures à 181 :

```
a=181; i=1; d[i]=1; out={};
While[ d[i]<=a, AppendTo[out, d[i]]; d[i+1]=d[i]*2;  i++];
TableForm[out]
```

1
2
4
8
16
32
64
128

2-ème étape

On passe en revue chaque ligne, pour déterminer celles qui doivent être biffées :

- Dans la colonne 2, on trouve le chiffre en base 2 ; un 0 indique que la ligne est biffée ;
- dans la colonne 3, on trouve le reste qui n'est pas encore converti ; le dernier reste doit être nul ;
  - — puisque $181 \geq 128$, il faut prendre 128 et former la différence 181-128=53 ;
  - — puisque $53 < 64$, il faut biffer 64 ;
  - — puisque $53 \geq 32$, il faut prendre 32 et former la différence 53-32=21 ;
  - — puisque $21 \geq 16$, il faut prendre 16 et former la différence 21-16=5 ;
  - — puisque $5 < 8$, il faut biffer 8 ;
  - — puisque $5 \geq 4$, il faut prendre 4 et former la différence 5-4=1 ;
  - — puisque $1 < 2$, il faut biffer 2 ;
  - — puisque $1 \geq 1$, prendre 1 et former la différence 1-1=0.

```
e=a;  n=i-1; out={};
Do[
     If[ e>=d[i], f[i]=1;e=e-d[i], f[i]=0];
     AppendTo[out, {d[i], f[i], e}],
{i, n, 1, -1}];
TableForm[out]
```

128	1	53
64	0	53
32	1	21
16	1	5
8	0	5
4	1	1
2	0	1
1	1	0

Multiplication égyptienne

Pour multiplier 181 par 273, on peut procéder comme suit :

1-ère étape

- Dans la première colonne : dresser la liste des puissances de 2, tant qu'elles ne sont pas supérieures à 181 ;
- dans la deuxième colonne : en regard de 2, 4, 8, ..., par doublements successifs, on calcule 2×273, 4×273, 8×273, ...

```
a=181; b=273; i=1; d[i]=1; g[1]=b; out={};
While[ d[i]<=a,
     AppendTo[out, {d[i], g[i]}];
     d[i+1]=d[i]*2; g[i+1]=g[i]*2;
i++];
TableForm[out]
```

1	273
2	546
4	1092
8	2184
16	4368
32	8736
64	17472
128	34944

2-ème étape

- colonnes 1 à 3 : on exprime 181 en base 2 (voir les commentaires plus haut) ;
- colonne 4 : on ne retient que les multiples de 273 situés sur des lignes non biffées.

```
n=i-1; e=a; out={};
Do[
     If[ e>=d[i], f[i]=1;e=e-d[i];AppendTo[out, {d[i],f[i],e,g[i]}],
          f[i]=0;AppendTo[out, {d[i],f[i],e}] ],
{i, n, 1, -1}];
TableForm[out]
```

128	1	53	34944
64	0	53	
32	1	21	8736
16	1	5	4368
8	0	5	
4	1	1	1092
2	0	1	
1	1	0	273

3-ème étape

- colonne 1 : les multiples de 273 qui ont été retenus doivent être additionnés ;
- colonne 2 : sommes partielles ; la dernière somme est le résultat final.

```
h=0; out={};
Do[
     If[ f[i]==1, h=h+g[i]; AppendTo[out, {g[i], h}] ],
{i, 1, n}];
TableForm[out]
```

273	273
1092	1365
4368	5733
8736	14469
34944	49413

Division égyptienne

Il s'agit d'une division euclidienne : le quotient est un entier et le reste est entier. Alors que les Égyptiens savaient manipuler certaines fractions, dans le papyrus de *Rhind*, le reste est généralement ignoré.
A titre d'exemple, considérons le quotient de 95432 par 285. Pour diviser 95432 par 285, on peut procéder comme suit.

1-ère étape

- dans la première colonne : multiplier 285 répétitivement par 2, tant que le résultat n'est pas supérieur à 95432 ;
- dans la deuxième colonne : en regard, écrire les multiples de 2.

```
a=95432; b=285; i=1; d[i]=1; g[1]=b; out={};
While[ g[i]<=a,
     AppendTo[out, {g[i], d[i]}];
     d[i+1]=d[i]*2; g[i+1]=g[i]*2;
i++];
TableForm[out]
```

285	1
570	2
1140	4
2280	8
4560	16
9120	32
18240	64
36480	128
72960	256

2-ème étape

- dans la colonne 2, un 0 signifie que la ligne doit être biffée ;
- dans la colonne 3 se trouve le reste qui sera, si possible, traité plus bas ; le dernier reste est le reste de la division.
  — puisque $95432 \geq 72960$, il faut prendre 256 et former la différence $95432 - 72960 = 22472$;
  — puisque $22472 < 36480$, il faut biffer 128 ;
  — puisque $22472 \geq 18240$, il faut prendre 64 et former la différence $22472 - 18240 = 4232$;
  — puisque $4232 < 9120$, il faut biffer 32 ;
  — puisque $4232 < 4560$, il faut biffer 16 ;
  — puisque $4232 \geq 2280$, il faut prendre 8 et former la différence $4232 - 2280 = 1952$;
  — puisque $1952 \geq 1140$, il faut prendre 4 et former la différence $1952 - 1140 = 812$;
  — puisque $812 \geq 570$, il faut prendre 2 et former la différence $812 - 570 = 242$;

  - — puisque $242 < 285$, il faut biffer 1 ;
  - — le reste de la division est 242.
- colonne 4 : on ne retient que les multiples de 2 situés sur des lignes non biffées.

```
n=i-1; e=a; out={};
Do[
     If[ e>=g[i], f[i]=1; e=e-g[i]; AppendTo[out, {g[i],f[i],e,d[i]}],
            f[i]=0; AppendTo[out, {g[i], f[i], e}] ],
{i, n, 1, -1}];
TableForm[out]
```

72960	1	22472	256
36480	0	22472	
18240	1	4232	64
9120	0	4232	
4560	0	4232	
2280	1	1952	8
1140	1	812	4
570	1	242	2
285	0	242	

3-ème étape

- colonne 1 : les multiples de 2 qui ont été retenus doivent être additionnés ;
- colonne 2 : sommes partielles ; la dernière somme est le quotient.
- Réponse : le quotient est de 334 et le reste est de 242.

```
h=0; out={};
Do[
     If[ f[i]==1, h=h+d[i]; AppendTo[out, {d[i], h}] ],
{i, 1, n}];
TableForm[out]
```

2	2
4	6
8	14
64	78
256	334

Justification de la division égyptienne

Une propriété de la division euclidienne est la suivante :

Si $r =$ a - $b\ q$ avec $0 \leqslant r < b$,

alors r est le reste de la division de a par b, et q est le quotient de a par b.

En effet, dans la 2-ème étape, colonne 3, la suite des restes

$$
\boxed{\begin{array}{l}
r_0 = 95423 \quad \text{(implicitement)} \\
r_1 = 22472 = 95432 - 256 * 285; \quad r_1 \geqslant 0; \\
r_2 = \quad \ldots \quad ; \\
\ldots \\
r_9 = 95432 - 256 * 285 - 64 * 285 - 8 * 285 - 4 * 285 - 2 * 285 \\
\quad = 95432 - 285 * (256 + 64 + 8 + 4 + 2) = 242; \quad r_9 \geqslant 0;
\end{array}}
$$

est décroissante ; elle est achevée, car $r_9 < 285$.
Il s'ensuit que, pour la division de 95432 par 285, le reste est r_9 et le quotient est (256+64+8+4+2).

Marcel Délèze

Lien vers la page mère : Mathématiques, niveau secondaire II

www.deleze.name/marcel/sec2/index.html