Calculer précisément ln(x) et log(x)

■ 1. Mettre le nombre réel positif x sous la forme ($m\,2^k$) où ($1 \le m < 2$) et (k entier relatif)

Il s'agit d'une variante de la notation scientifique en base 2 (k = partie exposant de la base 2; m = partie mantisse)

$$x = m\,2^k \qquad \text{où} \qquad (1 \le m < 2) \qquad \text{et} \qquad (k \text{ entier relatif})$$

Le logaritme de 2 étant une constante connue: ln(2) =

0.693147180559945309417232121458176568075500134360255254120680009493393621969694715605863326996418687
542001481020570685733685520235758130557032670751635075943695952 36

le problème du calcul du logarithme naturel est ainsi réduit à l'intervalle [1, 2[

$$\ln(x) = \ln\left(m\,2^k\right) = \ln(m) + \ln\left(2^k\right) = k\ln(2) + \ln(m)$$

■ 2. Changement de variable $m = \frac{1+u}{1-u}$, c'est-à-dire $u = \frac{m-1}{m+1}$

Le développement en série suivant est bien connu

$$\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + \frac{u^{11}}{11} + \frac{u^{13}}{13} + \ldots\right)$$

La série converge pour $-1 < u < 1$.

De $1 \le m < 2$, on déduit que $0 \le u < \frac{1}{3}$, ce qui nous assure une convergence numérique suffisante.

■ 3. Calcul numérique de ln(x)

Les sommes partielles

$$s = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + \frac{u^{11}}{11} + \frac{u^{13}}{13} + \ldots$$

sont calculées jusqu'à ce que, à la précision fixée, elles ne croissent plus.

$$\ln(x) = k * \ln 2 + 2 * s$$

■ 4. Calcul numérique de log(x)

Dans la formule de changement de base $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, le facteur de conversion étant connu: $f = \frac{1}{\ln(10)} =$

0.434294481903251827651128918916605082294397005803666566114453783165864649208870774729224949338431748318706106744766303733641679287158963906569221064663

il sufffit d'effectuer la multiplication

$$\log(x) = f * \ln(x)$$

■ Lien hypertexte vers la page mère

http://www.deleze.name/marcel/sec2/ln/index.html