

Énoncés des exercices « a4 - Calcul intégral (renforcé), première partie »

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a4/a4-integr_1.pdf

Calcul intégral (renforcé), première partie - Corrigés

Corrigé de l'exercice 1

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln^2(4x)}{x} dx &= \int (\ln(4x))^2 \frac{1}{x} dx \\ (\ln(4x))' &= \frac{(4x)'}{4x} = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x} \\ \int \frac{\ln^2(4x)}{x} dx &= \int (\ln(4x))^2 (\ln(4x))' dx = \frac{1}{3} (\ln(4x))^3 + c = \frac{1}{3} \ln^3(4x) + c\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx &= \int \left(1 + \frac{-x + 6}{x^2 + x - 6} \right) dx \\ &= \int \left(1 + \frac{-x + 6}{(x - 2)(x + 3)} \right) dx = x + \int \frac{-x + 6}{(x - 2)(x + 3)} dx \\ \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3} &= \frac{A(x + 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{(A + B)x + (3A - 2B)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{-x + 6}{(x - 2)(x + 3)}\end{aligned}$$

$$A + B = -1 \quad \text{et} \quad 3A - 2B = 6$$

$$A = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad B = -\frac{9}{5}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx &= x + \frac{4}{5} \int \frac{1}{x - 2} dx - \frac{9}{5} \int \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x + \frac{4}{5} \ln |x - 2| - \frac{9}{5} \ln |x + 3| + c\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

$$\int \frac{x \sin(x)}{\cos^3(x)} dx$$

Par parties :

$$f(x) = (\cos(x))^{-3} \sin(x), \quad F(x) = (-1) \left(-\frac{1}{2} \right) (\cos(x))^{-2}$$

$$g(x) = x, \quad g'(x) = 1$$

$$\int \frac{x \sin(x)}{\cos^3(x)} dx = \frac{x}{2 \cos^2(x)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \frac{x}{2 \cos^2(x)} - \frac{1}{2} \tan(x) + c$$

Corrigé de l'exercice 4

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Par changement de variable :

$$1 - x^2 = t^2, \quad t \geq 0$$

$$x^2 = 1 - t^2, \quad x = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{1}{2} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (-2t) dt = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{t} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int -(1-t^2)^1 dt \\ &= \int (t^2 - 1) dt = \frac{1}{3} t^3 - t + c = \frac{t}{3} (t^2 - 3) + c \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} ((1-x^2) - 3) + c = \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (-x^2 - 2) + c \\ &= -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (x^2 + 2) + c \end{aligned}$$

Lien vers la page mère : [Exercices avec corrigés sur www.deleze.name](http://www.deleze.name)

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/index.html

Marcel Déleze