

a2 - Suites, séries, récurrence

Matières

Suites, séries, suites et séries arithmétiques, suites et séries géométriques. Démonstration par induction mathématique complète (c'est-à-dire par récurrence).

Exercice 1

Combien faut-il prendre de termes de la suite arithmétique

$$3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, \dots$$

pour que leur somme atteigne ou dépasse 5000 ?

Exercice 2

Sous l'hypothèse $x \neq 1$, démontrez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Exercice 3

Sous l'hypothèse $x > -1$, démontrez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 4

Etape numéro 0 : Dans une yaourtière, on verse initialement un litre de lait qu'on répartit uniformément entre six pots. (La quantité de ferments qu'on a rajouté est négligeable.)

Etape numéro 1 : (description de "l'opération de renouvellement") Après avoir mangé 5 pots, on remet, dans la yaourtière, un mélange constitué d'un litre de lait et du contenu du pot restant qu'on répartit uniformément entre six pots.

Etapes suivantes : On répète plusieurs fois l'opération de renouvellement.

Quelle quantité totale (en litres) contient la yaourtière après 2 opérations de renouvellement ? après n opérations de renouvellement (formule explicite) ?

Vers quelle quantité totale (en litres) tend le contenu de la yaourtière lorsqu'on répète indéfiniment l'opération de renouvellement ?

Exercice 5

On considère une suite géométrique de quatre termes.

La somme des deux premiers est égale à 24 ; la somme des deux derniers à 1176.

Déterminez les termes de cette suite.

Exercice 6

Un rayonnement radioactif perd 30 % de son intensité en traversant une plaque de plomb d'épaisseur d .

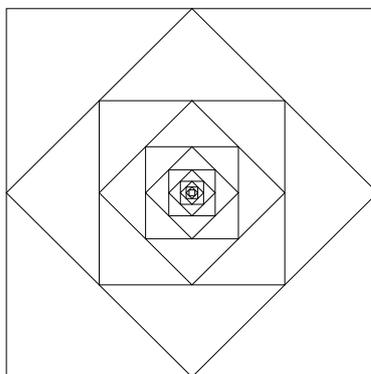
- Quel pourcentage de l'intensité initiale le rayonnement a-t-il perdu après qu'il ait traversé 10 plaques ?
- Combien de plaques faut-il au moins disposer pour qu'il subsiste moins de 1 % de l'intensité initiale ?

Exercice 7

Dans un carré de côté égal à 1, on inscrit un deuxième carré en joignant les milieux des côtés de ce carré. On réitère ce procédé plusieurs fois de suite (voir figure). On obtient une suite de carrés emboîtés

$$C_0, C_1, C_2, \dots$$

où C_0 désigne le carré donné.



- Déterminez le terme général de la suite des côtés c_n et celle des aires a_n des carrés inscrits. Précisez la raison de ces suites.
- Calculez la longueur de tous les segments pour tracer les carrés C_0 à C_{20} inclusivement.

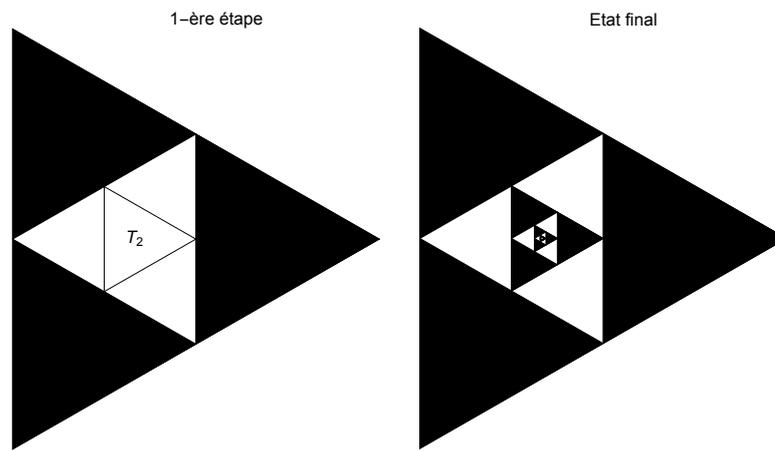
Exercice 8

Calculez la somme de tous les entiers positifs qui sont divisibles par 13 et inférieurs à 10 000.

Exercice 9

Un triangle équilatéral T_1 d'aire initiale A_1 étant donné, on y noircit successivement des surfaces de la manière suivante :

- à la première étape, on noircit les $\frac{3}{4}$ de T_1 ; l'aire noircie est notée $C_1 = \frac{3}{4}A_1$; puis on considère un nouveau triangle T_2 d'aire A_2 dont les dimensions sont 4 fois plus petites ;
- à la deuxième étape, on noircit les $\frac{3}{4}$ de T_2 ; l'aire noircie est notée $C_2 = \frac{3}{4}A_2$; puis on considère un nouveau triangle T_3 d'aire A_3 dont les dimensions sont 4 fois plus petites ;
- etc. (voir figures).



- a) Exprimez en fonction de A_1 les aires suivantes : $A_2, C_2, A_3, C_3, A_n, C_n$.
- b) Quel pourcentage de T_1 est-il noirci après 40 étapes ?

Exercice 10

On dispose les termes d'une suite arithmétique selon le tableau triangulaire suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 = 5 & & & & & & \\
 a_2 = 8 & & a_3 = 11 & & & & \\
 a_4 = 14 & & a_5 = 17 & & a_6 = 20 & & \\
 a_7 = 23 & & a_8 = 26 & & a_9 = 29 & & a_{10} = 32 \\
 a_{11} = 35 & & \dots & & & &
 \end{array}$$

- a) Calculez l'expression du n -ème terme : $a_n = \dots$
- b) On considère la suite des indices "diagonaux" :

$$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6, b_4 = 10, \dots$$

Calculez l'expression du n -ème terme : $b_n = \dots$

Indication : $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

- c) On considère la suite des valeurs "diagonales" :

$$c_1 = 5, c_2 = 11, c_3 = 20, c_4 = 32, \dots$$

Calculez l'expression du n -ème terme : $c_n = \dots$

Indication : c_4 a la valeur de a_k pour l'indice $k = b_4$.

- d) Sur quelle ligne du tableau initial se trouve le nombre 3674 ?
Indication : c_n est situé sur la n -ème ligne.
- e) Dans quelle colonne du tableau initial se trouve le nombre 3674 ?

Corrigés des exercices « a2 - Suites, séries, récurrence »

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/a2/a2-suites-cor.pdf