**Énoncés des exercices « 4s - Fonctions trigonométriques (avec dérivées) »**

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/4s/4s-trigo.pdf

# 4s - Fonctions trigonométriques (avec dérivées) - Corrigés

## Corrigé de l'exercice 1

$$2x - \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k 2\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k 2\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + k 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k 2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + k 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\,\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$$

$$x \simeq 0.785398 + k\pi \quad \text{ou} \quad x \simeq 1.308997 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

## Corrigé de l'exercice 2

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\pi} \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \cos(\pi x) = \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$$

## Corrigé de l'exercice 3

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\cos(2x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{2x}{\sin(2x)} \cos(2x) \frac{3}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot (x - 1) = 1 \cdot (0 - 1) = -1$$

**Corrigé de l'exercice 4**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x)-\cos(a)}{x} = \cos'(a) = -\sin(a)$$

**Corrigé de l'exercice 5**

**a)**

$$\begin{aligned}
\left(\sin\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\right)' &= \left(\frac{a-x}{a+x}\right)'\cos\left(\frac{a-x}{a+x}\right) \\
&= \frac{(-1)(a+x)-(a-x)\cdot 1}{(a+x)^2}\cos\left(\frac{a-x}{a+x}\right) \\
&= \frac{-2a}{(a+x)^2}\cos\left(\frac{a-x}{a+x}\right)
\end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\tan(2x)\right)' &= \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'\tan(2x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)(\tan(2x))' \\
&= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\tan(2x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{2}{\cos^2(2x)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x)}{2\cos(2x)} + \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2(2x)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x)\cos(2x)+4\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2(2x)}
\end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 6**

**a)**

$$\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\left(-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right) = \frac{-\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
\left(\tan^2(1-2x)\right)' &= \left((\tan(1-2x))^2\right)' = 2\tan(1-2x)(\tan(1-2x))' \\
&= 2\tan(1-2x)\frac{1}{\cos^2(1-2x)}(1-2x)' \\
&= \frac{-4\tan(1-2x)}{\cos^2(1-2x)}
\end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(5x)}{\cos^2(5x)+1}\right)' &= \frac{(\sin(5x))'\cdot(\cos^2(5x)+1)-\sin(5x)\cdot(\cos^2(5x)+1)'}{(\cos^2(5x)+1)^2}\\
&= \frac{5\cos(5x)\cdot(\cos^2(5x)+1)-\sin(5x)2\cos(5x)\cdot(-5\sin(5x))}{(\cos^2(x)+1)^2}\\
&= \frac{5\cos(5x)\cos^2(5x)+5\cos(5x)+10\sin(5x)\cos(5x)\sin(5x)}{(\cos^2(5x)+1)^2}\\
&= 5\cos(5x)\frac{\cos^2(5x)+1+2\sin^2(5x)}{(\cos^2(5x)+1)^2}\\
&= 5\cos(5x)\frac{\cos^2(5x)+1+2\left(1-\cos^2(5x)\right)}{(\cos^2(5x)+1)^2}\\
&= 5\cos(5x)\frac{3-\cos^2(5x)}{(\cos^2(5x)+1)^2}
\end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 7**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2-\cos(x))'\sin(x)-(2-\cos(x))(\sin(x))'}{(\sin(x))^2}\\
&= \frac{\sin(x)\ \sin(x)-(2-\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x))^2}\\
&= \frac{\sin^2(x)-2\cos(x)+\cos^2(x)}{(\sin(x))^2}\\
&= \frac{1-2\cos(x)}{(\sin(x))^2}
\end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \iff 1-2\cos(x)=0 \iff \cos(x)=\frac{1}{2} \iff x=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

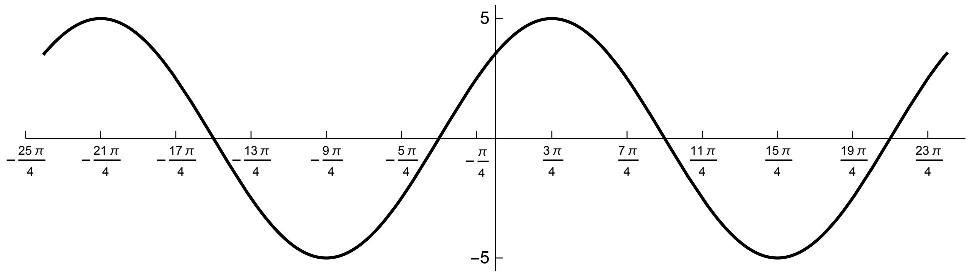
| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{sign}(f'(x))$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ |
| $\text{Var}(f)$ | $\|\|$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | $\|\|$ |

## Corrigé de l'exercice 8

$$f(x) = 5\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Pour remplir le tableau, commencer par les lignes 2, 3, 4, puis terminer par la ligne 1.

| $x$ | $-\frac{9\pi}{4}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{9\pi}{4}$ | $\frac{15\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4})$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $5\,\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4})$ | $-5$ | $0$ | $5$ | $0$ | $-5$ |



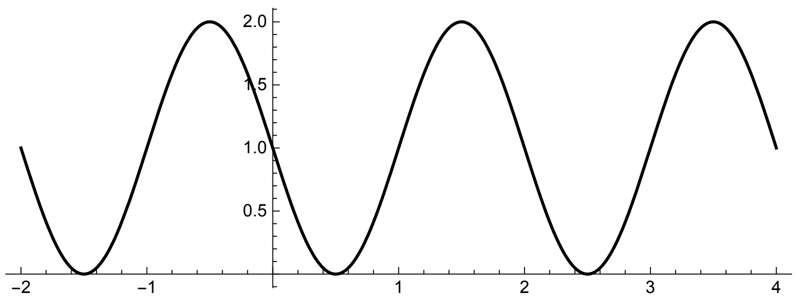

**b)** Période : $T = 6\pi$.
Maximums : $\left(\frac{3\pi}{4} + k6\pi; 5\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

## Corrigé de l'exercice 9

$$f(x) = 1 - \sin(\pi - \pi x)$$

Pour remplir le tableau, commencer par les lignes 2, 3, 4, 5, puis terminer par la ligne 1.

| $x$ | $2$ | $\frac{3}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ - $\pi$ x | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $\sin(\pi$-$\pi x)$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| -$\sin(\pi$-$\pi x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $f(x)$ | $1$ | $2$ | $1$ | $0$ | $1$ |




**b)** Période : $T = 2$.
Un maximum : $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

**Lien vers la page mère : Exercices avec corrigés sur www.deleze.name**

www.deleze.name/marcel/sec2/ex-corriges/index.html

*Marcel Délèze*