Marcel Délèze

§ 2 Espaces vectoriels réels

3[e] et 4[e] année post-obligatoire [1[e] et terminale de lycée], option scientifique

Introduction et motivation

On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous voulons résoudre, avec des méthodes générales, le problème suivant (entre autres) :

> ces trois vecteurs sont-ils situés dans un même « plan vectoriel F qui contient aussi le vecteur $\vec{0}$ » ?

Dans ce § 2, nous expliquerons que

- le « plan vectoriel F qui contient aussi le vecteur $\vec{0}$ » est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^3$;
- $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3)$ est une **famille génératrice** de F :
  $F = \{\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\lambda_3\vec{u}_3 \mid \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\}$;
- $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3)$ est une **famille linéairement dépendante**, car
  $\vec{u}_3 = -3\vec{u}_1+2\vec{u}_2 \Leftrightarrow 3\vec{u}_1-2\vec{u}_2+\vec{u}_3 = \vec{0}$; ainsi, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\neq(0,0,0)$ tels que $\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0}$;
- $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ est une **famille linéairement indépendante**, car il n'existe pas
  $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$ tels que $\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2 = \vec{0}$, ce qui équivaut à
  $(\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2 = \vec{0}) \Rightarrow (\lambda_1=\lambda_2=0)$;
- F est un sous-espace de **dimension 2** dont **une base** est $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$.

En particulier, il s'agit d'introduire la terminologie utile pour aborder de telles questions et de définir les expressions qui, ci-dessus, ont été mises en caractères gras.

§ 2.1 Axiomes des espaces vectoriels réels

Vous savez déjà que les vecteurs du plan obéissent aux règles de calcul énumérées ci-dessous. Vous verrez que les vecteurs de l'espace obéissent aux mêmes règles. Comme il existe beaucoup d'autres situations où ces mêmes règles sont valables, il est utile de dégager la notion d'espace vectoriel.

Soit E un ensemble de vecteurs.

E est muni d'une loi de composition interne, dénommée « somme de deux vecteurs » qui, à deux vecteurs, fait correspondre le vecteur « somme » :

$$+ : \quad \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (\vec{u},\ \vec{v}) & \rightarrow & \vec{u}+\vec{v} \end{array}$$

E est muni d'une loi de composition externe, dénommée « produit d'un vecteur par un scalaire » qui, à un nombre réel et un vecteur, fait correspondre le vecteur « produit » :

$$\cdot : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda,\ \vec{v}) & \rightarrow & \lambda \cdot \vec{v} \end{array}$$

L'ensemble muni des deux lois de composition (E, +, ·) vérifie les axiomes suivants :

1.1 $\quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

1.2 $\quad \exists \vec{0} \in E \ \ tel\, que \ \ \forall \vec{u} \in E \quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

1.3 $\quad \forall \vec{u} \in E \ \ \exists (-\vec{u}) \in E \ \ tel\, que \quad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

1.4 $\quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

2.1 $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \ \forall \vec{u} \in E \quad (\lambda \mu) \cdot \vec{u}=\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$

2.2 $\quad \forall \vec{u} \in E \quad 1 \cdot \vec{u}=\vec{u}$

2.3 $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad \lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v})=\lambda \cdot \vec{u}+\lambda \cdot \vec{v}$

2.4 $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \ \forall \vec{u} \in E \quad (\lambda+\mu) \cdot \vec{u}=\lambda \cdot \vec{u}+\mu \cdot \vec{u}$

Dans le cas où toutes ces hypothèses sont satisfaites, (E, +, ·) est appelé espace vectoriel réel.

Dans ce cours, nous aurons souvent

$$E = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ou}$$

$$E = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

§ 2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit (E, +, ·) un espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace-vectoriel de E si les restrictions des deux lois de composition + et · à F font de (F, +, ·) un espace vectoriel.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$ muni des opérations + et · usuelles ;

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} .$$

Remarque : les sous-espaces $\{\vec{0}\}$ et E sont appelés **sous-espaces triviaux** de (E, +, ·).
Les autres sont appelés **sous-espaces stricts** de (E, +, ·).

Proposition

F est un sous-espace vectoriel de (E, +, ·) si et seulement si F est **stable** pour les deux lois de composition, c'est-à-dire

1. $\vec{u} \in F \;\; et \;\; \vec{v} \in F \;\Rightarrow\; (\vec{u}+\vec{v}) \in F$ et
2. $\lambda \in \mathbb{R} \;\; et \;\; \vec{u} \in F \;\Rightarrow\; (\lambda \cdot \vec{u}) \in F$.

§ 2.3 Famille génératrice

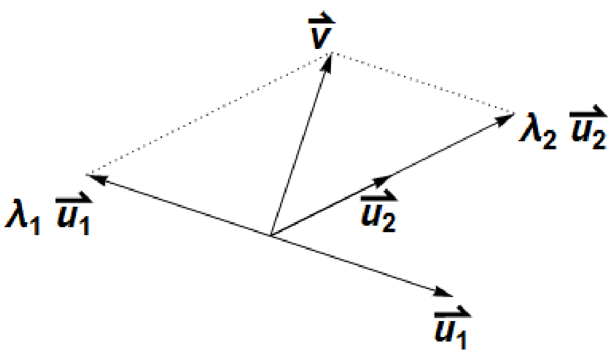
Famille de vecteurs

Une famille de vecteurs est une liste **ordonnée** de n vecteurs de E, notée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$.

Combinaison linéaire

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ une famille de 2 vecteurs de E. On dit que $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ si et seulement si il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2$.

Géométriquement, on peut s'imaginer que $\vec{v}$ appartient au sous-espace vectoriel sous-tendu par les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$:



Plus généralement, on dit que $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ si et seulement si $\vec{v}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Famille génératrice

Étant donné une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$, on peut former l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille :

$$F = \{\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

On montre aisément que F est un sous-espace vectoriel de (E, +, ·).

On dit que F est le sous-espace **engendré par** la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$, ce que l'on note

$$F = \pounds(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$ (ou avec le symbole $\mathscr{L}$).

On dit aussi que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est une **famille génératrice** de F.

Critère

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$.

$(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice de F si et seulement si

$$\pounds(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n) = F$$

Démonstration

" $\Rightarrow$ " puisque F est un sous-espace vectoriel, si $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n \in F$, alors les combinaisons linéaires de ces vecteurs appartiennent aussi à F, c'est-à-dire $\pounds(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n) \subset F$;

" $\Leftarrow$ " Pour montrer que $F \subset \pounds(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$, il faut prouver que :

$$\forall \vec{v} \in F \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \textit{tels que} \quad \vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{g}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{g}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{g}_n$$

c'est-à-dire que le système d'équations $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{g}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{g}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{g}_n$

possède au moins une solution $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ quel que soit $\vec{v} \in F$. $\blacksquare$

Exemple 1

La droite vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$ est engendrée par une famille constituée d'un seul vecteur $(\vec{u}_1)$, avec par exemple $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ou bien $\vec{u}'_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Exemple 2

Le plan vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ est engendré par la famille de deux vecteurs

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

F est aussi engendré par la famille de trois vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Théorème

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, pour vérifier que $F \subset G$, il n'est pas nécessaire de considérer tous les vecteurs de F, car il suffit de le vérifier pour un système de générateurs de F. Plus précisément :

Soient $F = \pounds(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m)$ et $G = \pounds(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \subset G$ si et seulement si $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $\vec{f}_i \in G$, c'est-à-dire les m systèmes d'équations $\vec{f}_i = \lambda_1 \cdot \vec{g}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{g}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{g}_n$ possèdent chacun au moins une solution

$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

§ 2.4 Famille linéairement indépendante

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on donne

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Dans cette situation, les quatre propositions suivantes sont vraies :

(i) la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ n'est pas minimale : la sous-famille stricte $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ engendre le même sous-espace que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$;

(ii) un vecteur (au moins) de la famille est combinaison linéaire des autres ; par exemple

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = -2.5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}$$, c'est-à-dire

$$\vec{u}_3 = -2.5\cdot\vec{u}_1+(-1)\cdot\vec{u}_2$$

(iii) pour (au moins) un vecteur $\vec{v}$, l'expression de $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ n'est pas unique ; par exemple,

$$\vec{v} = 0\cdot\vec{u}_1+0\cdot\vec{u}_2+1\cdot\vec{u}_3$$
$$\vec{v} = (-2.5)\cdot\vec{u}_1+(-1)\cdot\vec{u}_2+0\cdot\vec{u}_3$$

(iv) la représentation du vecteur nul comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ n'est pas unique :

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{u}_1+0\cdot\vec{u}_2+0\cdot\vec{u}_3$$
$$\vec{0} = 2.5\cdot\vec{u}_1+1\cdot\vec{u}_2+0\cdot\vec{u}_3$$

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad .$$

Dans cette situation, les quatre propositions suivantes sont vraies :

(i) la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est minimale, c'est-à-dire que les sous-espaces engendrés par $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, $(\vec{u}_1,\vec{u}_3)$, $(\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ sont tous différents de l'espace engendré par $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$;

(ii) aucun des trois vecteurs n'est combinaison linéaire des deux autres ; par exemple, le système d'équations linéaires $\vec{u}_2 = \lambda_1\cdot\vec{u}_1+\lambda_3\cdot\vec{u}_3$ n'a pas de solution $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_3\end{pmatrix}$;

(iii) pour tous les vecteurs

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\cdot\vec{u}_1+y\cdot\vec{u}_2+z\cdot\vec{u}_3$$

et les coefficients x, y, z sont déterminés d'une manière unique ;

(iv)le système d'équations $\vec{0} = \lambda_1\cdot\vec{u}_1+\lambda_2\cdot\vec{u}_2+\lambda_3\cdot\vec{u}_3$ n'a pas d'autre solution que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Théorème et définition

Pour une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est minimale, c'est-à-dire que toute sous famille stricte engendre un sous-espace qui n'est pas égal à E ;

(ii) aucun vecteur de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ n'est combinaison linéaire des autres ;

(iii) si $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$, alors les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont déterminés d'une manière unique ;

(iv) la représentation de $\vec{0}$ comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est unique, c'est-à-dire le système d'équations linéaires $\vec{0} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$ a pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Lorsqu'une (au moins) de ces propositions est vraie, on dit que la famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est **linéairement indépendante** ou **libre**. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **linéairement dépendante** ou **liée**.

Démonstration

" (i) $\Rightarrow$ (ii) " par contraposition : " non(ii) $\Rightarrow$ non(i) "
supposons par exemple que $\vec{u}_j = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{j-1} \cdot \vec{u}_{j-1} + \lambda_{j+1} \cdot \vec{u}_{j+1} + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$, alors le sous-espace engendré par la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}_{j+1}, \dots, \vec{u}_n)$ coïncide avec celui engendré par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$.

" (ii) $\Rightarrow$ (iii) " par contraposition : " non(iii) $\Rightarrow$ non(ii) "
supposons que $\exists \vec{v} \in E$ tel que $\begin{aligned} \vec{v} &= \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n \\ &= \mu_1 \cdot \vec{u}_1 + \mu_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \mu_n \cdot \vec{u}_n \end{aligned}$ avec $\lambda_j \neq \mu_j$ pour (au moins) un indice j ; alors $(\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{u}_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_j - \mu_j)}_{\neq 0} \cdot \vec{u}_j + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$,

donc $\vec{u}_j$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$\vec{u}_j = \frac{-1}{\lambda_j - \mu_j} \cdot ((\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{u}_1 + \dots + (\lambda_{j-1} - \mu_{j-1}) \cdot \vec{u}_{j-1} + (\lambda_{j+1} - \mu_{j+1}) \cdot \vec{u}_{j+1} + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \vec{u}_n)$$

" (iii) $\Rightarrow$ (iv) " comme cas particulier $\vec{v} = \vec{0}$.

" (iv) $\Rightarrow$ (ii) " par contraposition : " non(ii) $\Rightarrow$ non(iv) "
supposons que, $\vec{u}_j = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{j-1} \cdot \vec{u}_{j-1} + \lambda_{j+1} \cdot \vec{u}_{j+1} + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$; alors
$\vec{0} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{j-1} \cdot \vec{u}_{j-1} + (-1) \cdot \vec{u}_j + \lambda_{j+1} \cdot \vec{u}_{j+1} + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$

" (ii) $\Rightarrow$ (i) " par contraposition : " non(i) $\Rightarrow$ non(ii) "
supposons que, pour un indice j, la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}_{j+1}, \dots, \vec{u}_n)$ engendre le même espace vectoriel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$; il s'ensuit que $\vec{u}_j$ est une combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}_{j+1}, \dots, \vec{u}_n)$. ∎

Pratiquement,

pour déterminer si n vecteurs sont linéairement indépendants, on utilise la proposition (iv), c'est-à-dire on résout le système d'équations linéaires $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$ de la manière suivante :

1. on écrit la famille de vecteurs dans un tableau
   $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
   (il n'est pas nécessaire d'écrire les inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) ;
2. les transformations élémentaires (voir § 1) , appliquées à ce tableau, laissent invariantes le nombre de colonnes linéairement indépendantes ;
3. un tableau triangulaire de m lignes et n colonnes, avec $m \geqslant n$, dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls indique que les n vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple (exercice résolu)

Dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille linéairement indépendante ?

Formons le tableau (aussi appelé « matrice ») : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour le réduire à la forme triangulaire, éliminons les coefficients situés au-dessous du premier pivot

(voir § 1) : $\left\{\begin{array}{llll} \underline{1} & 2 & \mid \cdot 2 & \mid \cdot 3 \\ 2 & -1 & \mid \cdot(-1) & \\ 3 & 1 & & \mid \cdot(-1) \end{array}\right\}$

On obtient : $\left\{\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{array}\right\}$.

Poursuivons en éliminant sous le deuxième pivot : $\left\{\begin{array}{llll} 1 & 2 & & \\ 0 & \underline{5} & & \mid \cdot 1 \\ 0 & 5 & \mid \cdot(-1) & \end{array}\right\}$.

On obtient : $\left\{\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}$.

Puisque tous les éléments diagonaux sont non nuls, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est linéairement indépendante.

§ 2.5 Bases

Base

La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$ est génératrice de E et linéairement indépendante.

Exemples : les bases canoniques

Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dimension

La dimension d'un espace vectoriel (E, +, ·) est égale au nombre de vecteurs d'une base de E.

$\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, car toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ sont des familles de deux vecteurs.

$\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, car toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ sont des familles de trois vecteurs.

Proposition

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ et $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_m)$ deux bases de E.

Alors $m = n$. (Sans démonstration)

Ainsi, la dimension d'un espace vectoriel ne dépend pas de la base choisie.

Corollaire : un espace vectoriel de dimension n, il y a au plus n vecteurs linéairement indépendants ; donc, (n+1) vecteurs sont forcément liés.

Remarque : Il existe des espaces vectoriels de toutes dimensions: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, ainsi que de dimension infinie (voir Exercice 2-21).

Proposition

Soit $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_n)$ un système générateur de E.

Alors $dim(E) \leqslant n$. (Sans démonstration)

Proposition

Soit $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_n)$ un système libre de E.

Alors $dim(E) \geqslant n$. (Sans démonstration)

Exemple

Reprenons l'exemple introductif de la page 1 :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \pounds(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \quad .$$

Comment déterminer une base de F ?

Nous savons que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est génératrice.

1e étape : La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est-elle libre ?

$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$. En laissant temporairement tomber les inconnues,

$$(I): \left\{ \begin{array}{rrrll} \underline{1} & 3 & 3 & | \cdot 2 & | \cdot 3 \\ -2 & -1 & 4 & | \cdot 1 & \\ 3 & 5 & 1 & & | \cdot(-1) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrll} 1 & 3 & 3 & & \\ & \underline{5} & 10 & | \cdot 1/5 & \\ & 4 & 8 & & | \cdot 1/4 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrll} 1 & 3 & 3 & & \\ & \underline{1} & 2 & & | \cdot 1 \\ & 1 & 2 & | \cdot(-1) & \end{array} \right\}$$

$$(\Delta): \left\{ \begin{array}{rrr} 1 & 3 & 3 \\ & \underline{1} & 2 \\ & & 0 \end{array} \right\} \quad \text{qui signifie}$$

$$(\Delta): \left\{ \begin{array}{rrrcl} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Il existe une solution $\vec{\lambda}$ non nulle, ce qui prouve que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée.

Remarque : si, au cours de la réduction à la forme triangulaire, on doit effectuer une permutation pour obtenir un pivot non nul, il vaut mieux permuter les colonnes que les lignes. (la justification est donnée ci-après). Permuter des colonnes équivaut à modifier l'ordre des inconnues.

2e étape : Remarquons que les deux premiers pivots du système triangulaire (Δ) sont non nuls. Formulons l'hypothèse : les vecteurs correspondants aux pivots non nuls $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ forment une base de F. Vérifions que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une famille libre :

$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 = \vec{0}$

$$\begin{cases} \lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & -\lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & +5\lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$ Il s'agit des deux premières colonnes du système (I).

Appliquons à ce système les mêmes transformations que dans la 1e étape :

$$\begin{cases} \lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 \\ & \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$ Il s'agit des deux premières colonnes du système (Δ) .

L'unique solution du système est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une famille libre.

Pour montrer qu'elle est génératrice, revenons au système (Δ) dans lequel on substitue $\lambda_3 = -1$. Il s'ensuit que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + (-1) \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$ (il suffit de voir que λ_1, λ_2 se laissent calculer, car nous n'avons ici pas besoin de leurs valeurs numériques). Donc $\vec{u}_3 = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2$.

Proposition

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ une famille de vecteurs de E.

Alors $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une base de E si et seulement si $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une famille libre.

Démonstration

" $\Rightarrow$ " Évident.

" $\Leftarrow$ " Supposons par l'absurde que la famille $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ ne soit pas génératrice de E. Il existerait alors (au moins) un vecteur $\vec{v} \in E$ qui ne puisse pas s'exprimer comme combinaison linéaire des $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$. Le système linéaire $\lambda_0 \cdot \vec{v} + \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$ ne pourrait pas avoir d'autre solution que $\vec{0}$. Ainsi, $(\vec{v}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ serait libre. La conséquence $dim(E) \geqslant (n+1)$ entrerait en conflit avec l'hypothèse. ■

Application courante

Dans l'espace, trois vecteurs linéairement indépendants forment une base.

Changement de bases

On donne deux bases de E : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ et l'expression de la deuxième par rapport à la première :

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= g_{11} \cdot \vec{e}_1 + g_{21} \cdot \vec{e}_2 + \dots + g_{n1} \cdot \vec{e}_n ; \\ \vec{g}_2 &= g_{12} \cdot \vec{e}_1 + g_{22} \cdot \vec{e}_2 + \dots + g_{n2} \cdot \vec{e}_n ; \\ & \dots \\ \vec{g}_n &= g_{1n} \cdot \vec{e}_1 + g_{2n} \cdot \vec{e}_2 + \dots + g_{nn} \cdot \vec{e}_n ; \end{aligned}$$

Première situation : On donne un vecteur exprimé dans la base $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_n)$, à savoir $\vec{a} = u_1 \cdot \vec{g}_1 + u_2 \cdot \vec{g}_2 + ... + u_n \cdot \vec{g}_n$ et on demande de l'écrire dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$; ce problème se résout par une simple substitution :

$$\vec{a} = u_1 \cdot \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ ... \\ g_{n1} \end{pmatrix} + u_2 \cdot \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ ... \\ g_{n2} \end{pmatrix} + ... + u_n \cdot \begin{pmatrix} g_{1n} \\ g_{2n} \\ ... \\ g_{nn} \end{pmatrix} .$$

Deuxième situation : On donne un vecteur exprimé dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, à savoir $\vec{a} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + ... + v_n \cdot \vec{e}_n$ et on demande de l'exprimer dans la base $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_n)$, c'est-à-dire on cherche les coefficients $u_1, u_2, ..., u_n$ tels que $\vec{a} = u_1 \cdot \vec{g}_1 + u_2 \cdot \vec{g}_2 + ... + u_n \cdot \vec{g}_n$. Écrivons cette dernière équation dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$; on obtient $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 \cdot \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ ... \\ g_{n1} \end{pmatrix} + u_2 \cdot \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ ... \\ g_{n2} \end{pmatrix} + ... + u_n \cdot \begin{pmatrix} g_{1n} \\ g_{2n} \\ ... \\ g_{nn} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à résoudre le système de n équations à n inconnues.

Pour l'utilisation pratique, on remarquera que la première **colonne** de la matrice est formée des composantes scalaires de $\vec{g}_1$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, la deuxième colonne des composantes de $\vec{g}_2$, et ainsi de suite, tandis que l'autre membre du système d'équations est constitué des composantes scalaires de $\vec{a}$ relativement à la même base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

Exercices des § 2.1, 2.2 et 2.3

Exercice 2-1

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

d'une addition $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ ainsi que

d'une multiplication par un scalaire $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démontrez que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Exercice 2-2

$(\mathbb{Z}^n, +, \cdot)$ Est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 2-3 [facultatif]

Soit P_n l'ensemble des fonctions polynomiales de degré ≤ n :

$$P_n = \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 , \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R} \}$$

On définit la somme de deux polynômes $p+q$ par $(p+q)(x) = p(x) + q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
ainsi que la multiplication d'un polynôme par un scalaire $\lambda \cdot p$ par
$(\lambda \cdot p)(x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Démontrez que $(P_n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Indication : écrire $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ afin de vérifier les axiomes 1.1 à 2.4 de la page 2.

Exercice 2-4

a) Montrez que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - 3y + z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

b) En est-il de même de $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - 3y + z = 1 \right\}$?

Exercice 2-5

On donne le système d'équations linéaires $(I): \begin{Bmatrix} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & -11x_2 & +7x_3 & = & -3 \end{Bmatrix}$ où les inconnues sont dans le membre de gauche et les termes constants dans le membre de droite.

Définitions : on appelle **système homogène associé** le système d'équations obtenu en remplaçant le membre de droite par $\vec{0}$, c'est-à-dire $(II): \begin{Bmatrix} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & -11x_2 & +7x_3 & = & 0 \end{Bmatrix}$.

D'une manière générale, on appelle **système linéaire homogène** tout système linéaire dont le membre de droite est nul. Remarquez que tout système homogène possède au moins une solution, à savoir $\vec{x} = \vec{0}$. Cette solution est appelée **solution triviale**.

Lorsque le membre de droite n'est pas nul (comme dans le système I), on dit que le système linéaire est **inhomogène**.

Pour les systèmes d'équations (I) et (II) donnés ci-dessus, démontrez que

a) L'ensemble des solutions H du système homogène est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

b) L'ensemble des solutions S du système inhomogène n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

c) Soit $\vec{a}$ une solution particulière du système inhomogène. Alors l'ensemble des solutions S du système inhomogène est $S = \{\vec{x} = \vec{a} + \vec{h} \mid \vec{h} \in H\}$.

d) Interprétez géométriquement $\vec{a}$ comme une translation entre H et S.
S est appelé **sous-espace affine** de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Exercice 2-6 [facultatif]

Un carré magique 3×3 est un tableau de 9 éléments $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix}$ (par exemple

$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$) dans lequel les huit quantités suivantes sont égales :

- la somme de chaque colonne ;
- la somme de chaque ligne ;
- la somme de chaque diagonale.

Démontrez que l'ensemble de ces carrés magiques est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^9, +, \cdot)$.

Exercice 2-7

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) \in E$.

Démontrez que l'ensemble des combinaisons linéaires de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est un sous-espace vectoriel F de $(E, +, \cdot)$.

Rappel : F est appelé « sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ » et noté $F = £(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ (ou avec le symbole $\mathscr{L}$).

Exercice 2-8

Considérons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 5x - 3y + 7z = 0 \right\}$$

a) Déterminez une famille génératrice de H.

b) Déterminez d'autres familles génératrices de H. Existe-t-il une famille génératrice de H formée de 3 vecteurs ? De 4 vecteurs ? De 1 vecteur ?

Exercice 2-9

Mêmes questions que sous 2-8 pour

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - 3y + z = 0 \quad et \quad x + y - z = 0 \right\} .$$

Exercice 2-10

On donne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -x + y + z = 0 \right\} .$$

a) Déterminez une famille génératrice de G.

b) Démontrez que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$ génère G.

Indication 1 : Pour montrer que $\pounds(\vec{g}_1, \vec{g}_2) \subset G$, il suffit de remarquer que $\vec{g}_1, \vec{g}_2 \in G$ et que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Indication 2 : Pour montrer que $G \subset \pounds(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$, il suffit de montrer que chaque élément d'une famille génératrice de G (voir partie a)) appartient à $\pounds(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$.

Exercice 2-11

On donne le système $\left\{\begin{array}{cccc} 2x & -y & -2z & = & 3 \\ 3x & -6y & +3z & = & 1 \\ 2x & +2y & -6z & = & 4 \end{array}\right\}$.

Donnez une interprétation géométrique au fait que ce système ne possède pas de solution.

Indication : Écrivez le système sous une forme vectorielle et interprétez le membre de gauche comme un élément d'un sous-espace vectoriel. Montrez que ce sous-espace vectoriel peut être généré par deux vecteurs seulement.

Exercice 2-12

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$.

a) Démontrez que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Illustrez avec l'exemple suivant : $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid 2x+3y = 0\right\}$,

$F_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid 7x-3y = 0\right\}$.

c) Dans le cas cas particulier b), en est-il de même de $F_1 \cup F_2$? *Indication* : déterminez d'abord un système générateur de F_1 et un système générateur de F_2 .

d) Dans le cas général a), en est-il de même de $F_1 \cup F_2$?

Exercices des § 2.4 et 2.5

Exercice 2-13

De chacune des familles suivantes, dites si elle est libre ou liée :

a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

b) $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right)$

c) $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$

d) $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$

e) $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\-11\end{pmatrix}\right)$

f) $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

Exercice 2-14 [facultatif]

L'ensemble P_3 des fonctions polynomiales de $degré \leqslant 3$, muni des opérations usuelles : l'addition de deux fonctions et la multiplication d'une fonction par un scalaire (comme dans l'exercice 2-3), est un espace vectoriel dans lequel on définit $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$ et $p_3(x) = x^3$.

Démontrez que

a) (p_0, p_1, p_2, p_3) est une famille génératrice de P_3,

b) (p_0, p_1, p_2, p_3) est une famille linéairement indépendante,

ce qui fait de (p_0, p_1, p_2, p_3) une base de $(P_3, +, \cdot)$.

Exercice 2-15

Déterminez une base du sous-espace de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$$H = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid 5x-3y+2z = 0\right\} .$$

Exercice 2-16

Préambule : si je vous donne rendez-vous dans un lieu bien déterminé (disons au rez-de-chaussée d'une gare connue), vous me répondrez qu'il manque l'heure du rendez-vous. Nous vivons dans un monde à quatre dimensions, trois d'espace, et une de temps.

Dans $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, les quatre vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent un sous-espace F.

Déterminez une base de F.

Exercice 2-17

Déterminez une base du sous-espace de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - y = 3y + z = 0 \right\} .$$

Exercice 2-18

On donne $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 3x - 2y + z = 0 \right\}$ et

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R} \right\} .$$

Déterminez une base de $F_1 \cap F_2$.

Exercice 2-19

On donne deux bases de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

- la base canonique $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et
- une autre base $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifiez que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ sont bien des bases de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimez $\vec{v} = 3 \cdot \vec{u}_1 - 5 \cdot \vec{u}_2 + 7 \cdot \vec{u}_3$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

c) Exprimez $\vec{w} = 5 \cdot \vec{e}_1 - 4 \cdot \vec{e}_2 - 7 \cdot \vec{e}_3$ dans la base . $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Exercice 2-20 [facultatif]

Dans l'ensemble P_2 des fonctions polynomiales de $degré \leqslant 2$, on considère

$$l_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \quad , \quad l_1(x) = -x(x-2) \quad \text{et} \quad l_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1) \quad .$$

a) Montrez que (l_0, l_1, l_2) est une base de P_2 .

b) Montrez que cette base possède la propriété suivante : étant donnés trois nombres réels a_0, a_1, a_2 , il existe un et un seul $p \in P_2$ tel que $p(0) = a_0$, $p(1) = a_1$ et $p(2) = a_2$; il s'agit de $p = a_0 \cdot l_0 + a_1 \cdot l_1 + a_2 \cdot l_2$.

c) Étant donné 3 nombres réels distincts x_0, x_1, x_2 avec $x_0 < x_1 < x_2$, déterminez une base (L_0, L_1, L_2) , appelée « base le Lagrange », telle que $L_i(x_j) = \begin{Bmatrix} 1 & si \;\; i=j \\ 0 & si \;\; i \neq j \end{Bmatrix}$.

d) Expliquez la phrase suivante : « *La base de Lagrange permet de résoudre un problème d'interpolation* ».

Exercice 2-21 [facultatif]

Considérons l'ensemble des applications (quelconques) définies sur $\mathbb{R}$:

$$A = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \;\; est\, une\, application \}$$

Munissons A d'une addition :

$$f+g \quad \text{défini par} \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et d'une multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot f \quad \text{défini par} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda(f(x))$$

a) Montrez que $(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

b) Démontrez que $P = \{ p \in A \mid p \;\; est\, un\, polynôme \}$ est un sous-espace vectoriel de A.

c) Démontrez que $dim(P) = \infty$. *Indication* : pour $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, montrez que les polynômes de Lagrange $(L_0, L_1, L_2, ..., L_n)$ forment une famille libre.

Exercice 2-22 a)

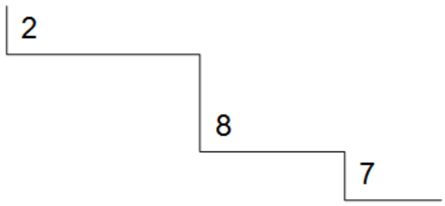
On donne le tableau 6×5 suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrez que les trois vecteurs des colonnes n° 1, 3, 5 sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^6$.

2) Montrez que les trois vecteurs des lignes n° 2, 4, 5 sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 2-22 b) [facultatif]

Généralisez ce résultat aux tableaux $m \times n$ en escalier. On appelle « système en escalier supérieur » tout système vérifiant les deux conditions suivantes :



- en dessous d'une ligne en escalier monotone décroissante, tous les éléments du tableau sont nuls ;
- appelons « éléments angulaires » les éléments situés dans les angles, au-dessus de l'escalier ; ces éléments doivent être non nuls.

Considérons un tableau $m \times n$ en escalier (supérieur), comportant k éléments angulaires.

Démontrez que

3. Les k vecteurs colonnes comportant des éléments angulaires sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^m$.
4. Les k vecteurs lignes comportant des éléments angulaires sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$.

Réponses des exercices des § 2.1, 2.2 et 2.3

Exercice 2-1

A titre d'exemple, vérifions la propriété 1.1 du § 2.1 (p. 2). Le membre de gauche est

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\dots\\u_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\dots\\v_n\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\dots\\w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\\dots\\u_n+v_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\dots\\w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(u_1+v_1)+w_1\\(u_2+v_2)+w_2\\\dots\\(u_n+v_n)+w_n\end{pmatrix}$$

tandis que le membre de droite s'écrit

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\dots\\u_n\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\dots\\v_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\dots\\w_n\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\dots\\u_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\\\dots\\v_n+w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1+(v_1+w_1)\\u_2+(v_2+w_2)\\\dots\\u_n+(v_n+w_n)\end{pmatrix}$$

Ces deux expressions sont égales, car l'addition dans $\mathbb{R}$ est associative.

Exercice 2-2

$(\mathbb{Z},\ +,\ \cdot\ )$ n'est pas un espace vectoriel réel, car $\begin{array}{l}\cdot:\ \mathbb{R}\times\mathbb{Z}\ \to\ \mathbb{Z}\\ (\lambda,\ \vec{v})\ \to\ \lambda\cdot\vec{v}\end{array}$ ne définit pas une multiplication par un scalaire réel. En effet, par exemple, $(\frac{1}{2},\ 1)\ \to\ \frac{1}{2}\cdot 1$ n'est pas un nombre entier.

En d'autres termes, $(\mathbb{Z},\ +,\ \cdot\ )$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R},\ +,\ \cdot\ )$ car $\mathbb{Z}$ n'est pas stable pour la multiplication par un scalaire réel (voir § 2.2).

Exercice 2-3

A titre d'exemple, vérifions la propriété 1.1 du § 2.1 (p. 2) :
$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, c'est-à-dire : quels que soient les polynômes u,v,w , $\forall x\in\mathbb{R} \quad (u(x)+v(x))+w(x)\ =\ u(x)+(v(x)+w(x))$.

Or, cette dernière égalité est valide puisque l'addition dans $\mathbb{R}$ est associative.

Exercice 2-4 a)

Montrons que H est stable pour l'addition : soient $\vec{u}\ =\ \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\in H$ et $\vec{v}\ =\ \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\in H$; il s'ensuit que $2u_1-3u_2+u_3\ =\ 0$ et $2v_1-3v_2+v_3\ =\ 0$. Pour

$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$, vérifions l'équation

$2(u_1+v_1)-3(u_2+v_2)+(u_3+v_3) = (2u_1-3u_2+u_3)+(2v_1-3v_2+v_3) = 0+0 = 0$, ce qui prouve que $(\vec{u}+\vec{v}) \in H$.

Montrons que H est stable pour la multiplication par un scalaire : soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; il s'ensuit que $2x-3y+z = 0$. Pour

$\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$, vérifions l'équation

$2(\lambda x)-3(\lambda y)+(\lambda z) = \lambda(2x-3y+z) = \lambda 0 = 0$, ce qui prouve que $(\lambda \cdot \vec{v}) \in H$.

Exercice 2-4 b)

Pour montrer que S n'est pas stable pour l'addition, il suffit de choisir un contre-exemple approprié. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in S$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in S$; il s'ensuit que

$2u_1-3u_2+u_3 = 1$ et $2v_1-3v_2+v_3 = 1$. Pour $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$, vérifions l'équation

$2(u_1+v_1)-3(u_2+v_2)+(u_3+v_3) = (2u_1-3u_2+u_3)+(2v_1-3v_2+v_3) = 1+1 = 2$, ce qui prouve que $(\vec{u}+\vec{v}) \notin S$.

Exercice 2-5 a)

Montrons que H est stable pour l'addition : soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in H$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in H$; il s'ensuit que $(II): \left\{ \begin{matrix} 2u_1 & -3u_2 & +u_3 & = & 0 \\ u_1 & +u_2 & -2u_3 & = & 0 \\ 4u_1 & -11u_2 & +7u_3 & = & 0 \end{matrix} \right\}$ et

$$(II):\ \left\{\begin{matrix} 2v_1 & -3v_2 & +v_3 & = & 0 \\ v_1 & +v_2 & -2v_3 & = & 0 \\ 4v_1 & -11v_2 & +7v_3 & = & 0 \end{matrix}\right\}$$. Pour $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$, vérifions le système homogène

$$\left\{\begin{matrix} 2(u_1+v_1)-3(u_2+v_2)+(u_3+v_3) = (2u_1-3u_2+u_3)+(2v_1-3v_2+v_3) = 0+0 = 0 \\ (u_1+v_1)+(u_2+v_2)-2(u_3+v_3) = (u_1+u_2-2u_3)+(v_1+v_2-2v_3) = 0+0 = 0 \\ 4(u_1+v_1)-11(u_2+v_2)+7(u_3+v_3) = (4u_1-11u_2+7u_3)+(4v_1-11v_2+7v_3) = 0+0 = 0 \end{matrix}\right\}$$

ce qui prouve que $(\vec{u}+\vec{v})\in H$.

Montrons que H est stable pour la multiplication par un scalaire : soient

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in H$ et $\lambda\in\mathbb{R}$; il s'ensuit que $(II):\ \left\{\begin{matrix} 2x & -3y & +z & = & 0 \\ x & +y & -2z & = & 0 \\ 4x & -11y & +7z & = & 0 \end{matrix}\right\}$.

Pour $\lambda\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$, vérifions le système homogène

$$(II):\ \left\{\begin{matrix} 2(\lambda x) & -3(\lambda y) & +(\lambda z) & = & \lambda(2x-3y+z) = \lambda 0 = 0 \\ (\lambda x) & +(\lambda y) & -2(\lambda z) & = & \lambda(x+y-2z) = \lambda 0 = 0 \\ 4(\lambda x) & -11(\lambda y) & +7(\lambda z) & = & \lambda(4x-11y+7z) = \lambda 0 = 0 \end{matrix}\right\}$$, ce qui prouve que $(\lambda\cdot\vec{v})\in H$.

Exercice 2-5 b)

Pour montrer que S n'est pas stable pour l'addition, il suffit d'exhiber un contre-exemple. Soient

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\in S$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\in S$; il s'ensuit que $(I):\ \left\{\begin{matrix} 2u_1 & -3u_2 & +u_3 & = & 1 \\ u_1 & +u_2 & -2u_3 & = & 3 \\ 4u_1 & -11u_2 & +7u_3 & = & -3 \end{matrix}\right\}$ et

$$(I):\ \left\{\begin{matrix} 2v_1 & -3v_2 & +v_3 & = & 1 \\ v_1 & +v_2 & -2v_3 & = & 3 \\ 4v_1 & -11v_2 & +7v_3 & = & -3 \end{matrix}\right\}$$. Pour $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$, vérifions le système inhomogène

$$\left\{\begin{matrix} 2(u_1+v_1)-3(u_2+v_2)+(u_3+v_3) = (2u_1-3u_2+u_3)+(2v_1-3v_2+v_3) = 1+1 = 2 \\ (u_1+v_1)+(u_2+v_2)-2(u_3+v_3) = (u_1+u_2-2u_3)+(v_1+v_2-2v_3) = 3+3 = 6 \\ 4(u_1+v_1)-11(u_2+v_2)+7(u_3+v_3) = (4u_1-11u_2+7u_3)+(4v_1-11v_2+7v_3)=-3+(-3) = -6 \end{matrix}\right\}$$

ce qui prouve que $(\vec{u}+\vec{v})\notin S$.

Exercice 2-5 c)

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in S$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in H$ et montrons que $(\vec{a}+\vec{h}) \in S$. En effet,

(I): $\begin{Bmatrix} 2a_1 & -3a_2 & +a_3 & = & 1 \\ a_1 & +a_2 & -2a_3 & = & 3 \\ 4a_1 & -11a_2 & +7a_3 & = & -3 \end{Bmatrix}$ et (II): $\begin{Bmatrix} 2h_1 & -3h_2 & +h_3 & = & 0 \\ h_1 & +h_2 & -2h_3 & = & 0 \\ 4h_1 & -11h_2 & +7h_3 & = & 0 \end{Bmatrix}$. Pour

$\vec{a}+\vec{h} = \begin{pmatrix} a_1+h_1 \\ a_2+h_2 \\ a_3+h_3 \end{pmatrix}$, vérifions le système inhomogène

$$\begin{Bmatrix} 2(a_1+h_1)-3(a_2+h_2)+(a_3+h_3) = (2a_1-3a_2+a_3)+(2h_1-3h_2+h_3) = 1+0 = 1 \\ (a_1+h_1)+(a_2+h_2)-2(a_3+h_3) = (a_1+a_2-2a_3)+(h_1+h_2-2h_3) = 3+0 = 3 \\ 4(a_1+h_1)-11(a_2+h_2)+7(a_3+h_3) = (4a_1-11a_2+7a_3)+(4h_1-11h_2+7h_3) = -3+0 = -3 \end{Bmatrix}$$

ce qui prouve que $(\vec{a}+\vec{h}) \in S$.

Réciproquement, soient $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \in S$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in S$ et montrons que $(\vec{s}-\vec{a}) \in H$. En

effet, (I): $\begin{Bmatrix} 2s_1 & -3s_2 & +s_3 & = & 1 \\ s_1 & +s_2 & -2s_3 & = & 3 \\ 4s_1 & -11s_2 & +7s_3 & = & -3 \end{Bmatrix}$ et (I): $\begin{Bmatrix} 2a_1 & -3a_2 & +a_3 & = & 1 \\ a_1 & +a_2 & -2a_3 & = & 3 \\ 4a_1 & -11a_2 & +7a_3 & = & -3 \end{Bmatrix}$.

Pour $(\vec{s}-\vec{a}) = \begin{pmatrix} s_1-a_1 \\ s_2-a_2 \\ s_3-a_3 \end{pmatrix}$, vérifions le système homogène

$$\begin{Bmatrix} 2(s_1-a_1)-3(s_2-a_2)+(s_3-a_3) = (2s_1-3s_2+s_3)-(2a_1-3a_2+a_3) = 1-1 = 0 \\ (s_1-a_1)+(s_2-a_2)-2(s_3-a_3) = (s_1+s_2-2s_3)-(a_1+a_2-2a_3) = 3-3 = 0 \\ 4(s_1-a_1)-11(s_2-a_2)+7(s_3-a_3) = (4s_1-11s_2+7s_3)-(4a_1-11a_2+7a_3) = -3-(-3) = 0 \end{Bmatrix}$$

ce qui prouve que $(\vec{s}-\vec{a}) \in H$.

Exercice 2-5c)

Pour un $\vec{a} \in S$ fixé, la relation $\vec{s} = \vec{a}+\vec{h}$ définit une correspondance biunivoque entre $\vec{s} \in S$ et $\vec{h} \in H$. Cette correspondance est une translation de vecteur $\vec{a}$.

On peut aussi le montrer en déterminant les formes paramétriques de S et H :

Forme paramétrique de S : $(I): \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 & \mid \cdot(-1) \quad \mid \cdot(-2) \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 3 & \mid \cdot 2 \\ 4x_1 & -11x_2 & +7x_3 & = & -3 & \qquad\qquad \mid \cdot 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$(I): \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & 5x_2 & -5x_3 & = & 5 \\ & -5x_2 & +5x_3 & = & -5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (I): \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \quad \text{où}$$

on peut librement choisir $x_3 = t$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{c} x_2 = x_3+1 = t+1 \\ x_1 = (3x_2-x_3+1)/2 = t+1/2 \end{array}\right\} \text{ , puis}$$

$$S: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1/2 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad où \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Forme paramétrique de H : $(II): \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0 & \mid \cdot(-1) \quad \mid \cdot(-2) \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 & \mid \cdot 2 \\ 4x_1 & -11x_2 & +7x_3 & = & 0 & \qquad\qquad \mid \cdot 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$(II): \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & 5x_2 & -5x_3 & = & 0 \\ & -5x_2 & +5x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (I): \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{où}$$

on peut librement choisir $x_3 = t$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{c} x_2 = x_3 = t \\ x_1 = (3x_2-x_3)/2 = t \end{array}\right\}$, puis

$$H: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad où \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

En comparant, on voit que S est l’image de H par la translation $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2-6

Notons M l'ensemble des carrés magiques. Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{bmatrix} \in M$. Il s'ensuit

que $\left\{\begin{array}{cccccccccccc} u_1 & +u_2 & +u_3 & & & & -u_7 & -u_8 & -u_9 & = & 0 \\ & & & u_4 & +u_5 & +u_6 & -u_7 & -u_8 & -u_9 & = & 0 \\ u_1 & & & +u_4 & & & +(u_7-u_7) & -u_8 & -u_9 & = & 0 \\ & u_2 & & & +u_5 & & -u_7 & +(u_8-u_8) & -u_9 & = & 0 \\ & & u_3 & & & +u_6 & -u_7 & -u_8 & +(u_9-u_9) & = & 0 \\ u_1 & & & & u_5 & & -u_7 & -u_8 & +(u_9-u_9) & = & 0 \\ & & u_3 & & +u_5 & & +(u_7-u_7) & -u_8 & -u_9 & = & 0 \end{array}\right\}$.

Attendu que ce système linéaire est homogène (voir exercice 2-5), l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^9$.

Exercice 2-7

Première partie : montrons que $\pounds(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est stable pour l'addition : soient $\vec{u}, \vec{v} \in \pounds(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$. Alors $\vec{u} = \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2 + \ldots + \mu_n \vec{u}_n$ et $\vec{v} = \nu_1 \vec{u}_1 + \nu_2 \vec{u}_2 + \ldots + \nu_n \vec{u}_n$, d'où $\vec{u}+\vec{v} = (\mu_1+\nu_1)\vec{u}_1 + (\mu_2+\nu_2)\vec{u}_2 + \ldots + (\mu_n+\nu_n)\vec{u}_n$, ce qui prouve que $(\vec{u}+\vec{v}) \in \pounds(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$.

Deuxième partie : montrons que $\pounds(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est stable pour la multiplication par un scalaire : soient $\vec{u} \in \pounds(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\vec{u} = \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2 + \ldots + \mu_n \vec{u}_n$, d'où $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \mu_1)\vec{u}_1 + (\lambda \mu_2)\vec{u}_2 + \ldots + (\lambda \mu_n)\vec{u}_n$, ce qui prouve que $(\lambda \cdot \vec{u}) \in \pounds(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$.

Exercice 2-8 a)

$5x-3y+7z = 0$ est un système linéaire de 1 équation à 3 inconnues qui se présente déjà sous la forme triangulaire (sa diagonale $a_{11} = 5$ est réduite à un seul terme).

Pour le résoudre, il faut remarquer que l'on peut librement choisir les valeurs de y et z, puis calculer x :

$$\left\{\begin{array}{ccc} y & = & 5s \\ z & = & 5t \\ x & = & (3y-7z)/5 = 3s-7t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 3s-7t \\ y & = & 5s \\ z & = & 5t \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-7t \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H.

Exercice 2-8 b)

$\left(\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}, 1\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\5\\5\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H de 3 vecteurs.

$\left(\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\5\\5\end{pmatrix}, 1\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\5\\-5\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H de 4 vecteurs.

Un système générateur formé d'un seul vecteur se représente par une droite. Étant donné que H se représente par un plan, il n'existe pas de système générateur de H formé d'un seul vecteur. La notion de dimension sera développée un peu plus tard dans les § 2.4 et § 2.5

Exercice 2-9 a)

Afin de le résoudre, réduisons le système de 2 équations à 3 inconnues

$\begin{Bmatrix} 2x & -3y & +z & = & 0 & \mid \cdot(-1) \\ x & +y & -z & = & 0 & \mid \cdot 2 \end{Bmatrix}$ à la forme triangulaire :

$\begin{Bmatrix} 2x & -3y & +z & = & 0 \\ & 5y & -3z & = & 0 \end{Bmatrix}$. Ici, on peut choisir librement la valeur de z, puis en déduire les valeurs correspondantes de y et x :

$$\begin{Bmatrix} z & = & 5t \\ y & = & (3z)/5 \ = \ 3t \\ x & = & (3y-z)/2 \ = \ 2t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\3t\\5t\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H.

Exercice 2-9 b)

$\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H constitué d'un seul vecteur.

$\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/5\\3/5\\1\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H constitué de deux vecteurs.

$\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/5\\3/5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-6\\-10\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H constitué de trois vecteurs.

$\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/5\\3/5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-6\\-10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\3\sqrt{2}\\5\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de H constitué de quatre vecteurs.

Exercice 2-10 a)

$-x+y+z = 0$ est un système linéaire de 1 équation à 3 inconnues qui se présente déjà sous la forme triangulaire (sa diagonale $a_{11} = -1$ est réduite à un seul terme).

Pour le résoudre, il faut remarquer que l'on peut librement choisir les valeurs de y et z, puis calculer x :

$$\begin{Bmatrix} y & = & s \\ z & = & t \\ x & = & y+z = s+t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x & = & s+t \\ y & = & s \\ z & = & t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s+t\\s\\t\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est un système générateur de G.

Exercice 2-10 b)

Pour prouver que $\pounds\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right) \subset G$, il suffit de montrer que $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \in \pounds\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Pour ce faire, résolvons les deux systèmes d'équations $\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et

$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$. La première $\begin{Bmatrix} \lambda_1 & +\lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 & & = & -2 \\ & \lambda_2 & = & 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 & & = & -2 & \mid \cdot(-1) \\ & \lambda_2 & = & 3 & \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & = & 1 & \mid \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & & = & -2 \\ & \lambda_2 & = & 3 \\ & \lambda_2 & = & 3 \end{cases}$$ possède (au moins une) solution. La deuxième $\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 & & = & 3 \\ & \lambda_2 & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 & & = & 3 & \mid \cdot(-1) \\ & \lambda_2 & = & -1 & \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & = & 2 & \mid \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & & = & 3 \\ & \lambda_2 & = & -1 \\ & \lambda_2 & = & -1 \end{cases}$$ possède (au moins une) solution.

Pour prouver que $G \subset £\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, il suffit de montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in £\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour ce faire, résolvons les deux systèmes d'équations $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La première

$$\begin{cases} \lambda_1 & +2\lambda_2 & = & 1 & \mid \cdot 2 & \mid \cdot 3 \\ -2\lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 1 & \mid \cdot 1 & \\ 3\lambda_1 & -\lambda_2 & = & 0 & & \mid \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & +2\lambda_2 & = & 1 \\ & 7\lambda_2 & = & 3 \\ & 7\lambda_2 & = & 3 \end{cases}$$ possède (au moins une) solution. La deuxième $\begin{cases} \lambda_1 & +2\lambda_2 & = & 1 & \mid \cdot 2 & \mid \cdot 3 \\ -2\lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 & \mid \cdot 1 & \\ 3\lambda_1 & -\lambda_2 & = & 1 & & \mid \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 & +2\lambda_2 & = & 1 \\ & 7\lambda_2 & = & 2 \\ & 7\lambda_2 & = & 2 \end{cases}$$ possède (au moins une) solution.

Exercice 2-11

Résolution : $\begin{cases} 2 & -1 & -2 & 3 & & \mid \cdot 3 & \mid \cdot(-1) \\ 3 & -6 & 3 & 1 & \mid \cdot(-2) & & \\ 2 & 2 & -6 & 4 & & & \mid \cdot 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2 & -1 & -2 & 3 & \\ & 9 & -12 & 7 & \mid \cdot 1 \\ & 3 & -4 & 1 & \mid \cdot(-3) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2 & -1 & -2 & 3 \\ & 9 & -12 & 7 \\ & & 0 & 10 \end{cases}$ où la dernière équation s'interprète $0z = 10$, ce qui montre que le système n'a pas de solution.

Interprétation vectorielle : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution, c'est-à-dire

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \notin \pounds\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$. On peut se représenter $\pounds\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$ comme un plan vectoriel, et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ comme un vecteur hors de ce plan.

Exercice 2-12 a)

Première partie : montrons que $F_1 \cap F_2$ est stable pour l'addition : soient $\vec{u}, \vec{v} \in F_1 \cap F_2$. Alors $\vec{u}, \vec{v} \in F_1$ implique, puisque F_1 est stable pour l'addition, $(\vec{u} + \vec{v}) \in F_1$ et $\vec{u}, \vec{v} \in F_2$ implique, puisque F_2 est stable pour l'addition, $(\vec{u} + \vec{v}) \in F_2$; donc $(\vec{u} + \vec{v}) \in F_1 \cap F_2$.

Deuxième partie : montrons que $F_1 \cap F_2$ est stable pour la multiplication par un scalaire : soient $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\vec{u} \in F_1$ implique, puisque F_1 est stable pour la multiplication par un scalaire, $(\lambda \cdot \vec{u}) \in F_1$ et $\vec{u} \in F_2$ implique, puisque F_2 est stable pour la multiplication par un scalaire, $(\lambda \cdot \vec{u}) \in F_2$; donc $(\lambda \cdot \vec{u}) \in F_1 \cap F_2$.

Exercice 2-12 b)

Il suffit de produire un contre-exemple : voir partie c).

Exercice 2-12 c)

$$F_1 \cap F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + 3y - 5z = 0 \quad et \quad 7x - 3y + 2z = 0 \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 & | \cdot 7 \\ 7 & -3 & 2 & 0 & | \cdot(-2) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ & 27 & -39 & 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ & 9 & -13 & 0 \end{Bmatrix} .$$

Posons $z = 9t$, d'où $\begin{Bmatrix} y = (13z)/9 = 13t \\ x = (-3y+5z)/2 = 3t \end{Bmatrix}$. Ainsi

$$F_1 \cap F_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$ qui est visiblement un sous-espace vectoriel.

$F_1 \cup F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x+3y-5z = 0 \quad ou \quad 7x-3y+2z = 0 \right\}$. On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_1$ et

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in F_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in F_1 \cup F_2$. Par contre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin F_1 \cup F_2$

car $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin F_1$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin F_2$. Ainsi $F_1 \cup F_2$ n'est pas stable pour l'addition, donc n'est pas un sous-espace vectoriel.

Réponses des exercices des § 2.4 et 2.5

Exercice 2-13 a)

Pour la méthode : voir la rubrique « Pratiquement » de la page 7.

$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & | \cdot(-1) \\ 1 & 2 & | \cdot 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}$. Donc la famille est libre.

Exercice 2-13 b)

Dans un espace vectoriel de dimension deux, une famille de trois vecteurs est nécessairement liée.

Exercice 2-13 c)

Pour la méthode : voir la rubrique « Pratiquement » de la page 7.

$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & | \cdot 1 & | \cdot 1 \\ -1 & 2 & | \cdot 1 & \\ 1 & -1 & & | \cdot(-1) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ & 5 \\ & 4 \end{Bmatrix}$. Donc la famille est libre.

Exercice 2-13 d)

Pour la méthode : voir la rubrique « Pratiquement » de la page 7.

$$\begin{cases} 1 & 2 & 3 & \mid \cdot 1 & \mid \cdot 3 \\ -1 & 1 & 2 & \mid \cdot 1 & \\ 3 & -1 & 1 & & \mid \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & 2 & 3 & \\ & 3 & 5 & \mid \cdot 7 \\ & 7 & 8 & \mid \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 5 \\ & & 11 \end{cases} .$$

Donc la famille est libre.

Exercice 2-13 e)

Pour la méthode : voir la rubrique « Pratiquement » de la page 7.

$$\begin{cases} 1 & 2 & 1 & \mid \cdot 1 & \mid \cdot 3 \\ -1 & 1 & 5 & \mid \cdot 1 & \\ 3 & -1 & -11 & & \mid \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & 2 & 3 & \\ & 3 & 6 & \mid \cdot 7 \\ & 7 & 14 & \mid \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 6 \\ & & 0 \end{cases} .$$

Donc la famille est liée.

Exercice 2-13 f)

Tout vecteur non nul constitue une famille libre.

Exercice 2-14 a)

Quel que soit le polynôme $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ de P_3 , on peut l'écrire sous la forme $p = a_0 \cdot p_0+a_1 \cdot p_1+a_2 \cdot p_2+a_3 \cdot p_3$, ce qui montre que la famille (p_0, p_1, p_2, p_3) est génératrice de P_3 .

Exercice 2-14 b)

Il faut montrer que $a_0 \cdot p_0+a_1 \cdot p_1+a_2 \cdot p_2+a_3 \cdot p_3 = 0$ implique $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. L'hypothèse signifie que $a_0 \cdot p_0(x)+a_1 \cdot p_1(x)+a_2 \cdot p_2(x)+a_3 \cdot p_3(x) = 0$ pour tous les nombres réels x, en particulier $p(0) = 0,\ p(1) = 0,\ p(-1) = 0\ et\ p(2) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_0 & & & & = 0 & \mid \cdot(-1) & \mid \cdot(-1) & \mid \cdot(-1) \\ a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 & = 0 & \mid \cdot 1 & & \\ a_0 & -a_1 & +a_2 & -a_3 & = 0 & & \mid \cdot 1 & \\ a_0 & +2a_1 & +4a_2 & +8a_3 & = 0 & & & \mid \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 & & & & = 0 & & \\ & a_1 & +a_2 & +a_3 & = 0 & \mid \cdot 1 & \mid \cdot(-2) \\ & -a_1 & +a_2 & -a_3 & = 0 & \mid \cdot 1 & \\ & 2a_1 & +4a_2 & +8a_3 & = 0 & & \mid \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 & & & & = 0 & \\ & a_1 & +a_2 & +a_3 & = 0 & \\ & & 2a_2 & & = 0 & \mid \cdot(-1) \\ & & 2a_2 & +6a_3 & = 0 & \mid \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 & & & = 0 \\ & a_1 & +a_2 & +a_3 = 0 \\ & & 2a_2 & = 0 \\ & & & 6a_3 = 0 \end{cases}$$, ce qui démontre que la famille (p_0, p_1, p_2, p_3) est linéairement indépendante.

Exercice 2-15

Dans l’équation $5x-3y+2z = 0$, on peut choisir librement z et y, puis calculer $x = \frac{3}{5}y-\frac{2}{5}z$. Il vient $\begin{cases} x = 3s-2t \\ y = 5s \\ z = 5t \end{cases}$ $s,t\in\mathbb{R}$ c’est-à-dire

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Une base de H est $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2-16

Adoptons la méthode suivante : réduisons le tableau des quatre vecteurs lignes à la forme triangulaire. Après d’éventuelles permutations de lignes, ceux qui subsisteront dans la partie triangulaire supérieure, avec des pivots non nuls, seront linéairement indépendants. (On peut aussi développer une autre variante de la méthode en disposant les vecteurs donnés en colonnes).

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1: & -1 & 1 & 2 & -1 & | \; 2\cdot\vec{u}_1 & | \; 3\vec{u}_1 & | \; 1\cdot\vec{u}_1 \\ \vec{u}_2: & 2 & 3 & -1 & 1 & | \; 1\cdot\vec{u}_2 & & \\ \vec{u}_3: & 3 & 7 & 0 & 1 & & | \; 1\cdot\vec{u}_3 & \\ \vec{u}_4: & 1 & 9 & 4 & -1 & & & | \; 1\cdot\vec{u}_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1: & -1 & 1 & 2 & -1 & & \\ \vec{u}_2+2\vec{u}_1: & & 5 & 3 & -1 & | \cdot(-2) & | \cdot(-2) \\ \vec{u}_3+3\vec{u}_1: & & 10 & 6 & -2 & | \cdot 1 & \\ \vec{u}_4+\vec{u}_1: & & 10 & 6 & -2 & & | \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1: & -1 & 1 & 2 & -1 \\ \vec{u}_{2\,modifié} & & 5 & 3 & -1 \\ \vec{u}_{3\,modifié} & & & 0 & 0 \\ \vec{u}_{4\,modifié} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Les transformations effectuées montrent que $(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$ sont des combinaisons linéaires de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une famille libre. On en conclut que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de F.

Exercice 2-17

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$. Le système est triangulaire. On peut choisir librement z et calculer y et x : $\begin{cases} z = -6t \\ y = \frac{-z}{3} = 2t \\ x = \frac{y}{2} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, ce qui montre qu'une base est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2-18

Il s'agit de l'intersection de deux sous-espaces dans le cas où l'un est défini par un système cartésien et l'autre par un système paramétrique.

Substituons le deuxième système dans le premier :

$3(r+2s)-2(-r+3s)+(3r-s) = 0 \Leftrightarrow 8r-s = 0 \Leftrightarrow s = 8r$

Substituons ce dernier résultat dans la forme paramétrique :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}+8r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ -5 \end{pmatrix}$, ce qui montre qu'une base est $\left(\begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2-19 a)

$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un système générateur, car tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ se laisse écrire sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\cdot\vec{e}_1+y\cdot\vec{e}_2+z\cdot\vec{e}_3$.

$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un système libre, car le système d'équations

$x\cdot\vec{e}_1+y\cdot\vec{e}_2+z\cdot\vec{e}_3 = \vec{0}$ ne possède pas d'autre solution que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Pour montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base, il suffit de montrer que le système d'équations $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ possède une et une seule solution $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ quel que soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl|l|l} -\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & x & \cdot 3 & \cdot 2 \\ 3\lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = & y & \cdot 1 & \\ 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & +\lambda_3 & = & z & & \cdot 1 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} -\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & x \\ & 2\lambda_2 & +10\lambda_3 & = & 3x+y \\ & & 7\lambda_3 & = & 2x+z \end{array}\right\}$$

. Vu que ce système possède une et une seule solution, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base.

Exercice 2-19 b)

$$\vec{v} = 3 \cdot \vec{u}_1 - 5 \cdot \vec{u}_2 + 7 \cdot \vec{u}_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3-5+21 \\ 9+5+7 \\ 6+10+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \\ 23 \end{pmatrix} = 13 \cdot \vec{e}_1 + 21 \cdot \vec{e}_2 + 23 \cdot \vec{e}_3$$

Exercice 2-19 c)

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr|l|l} -\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & 5 & \cdot 3 & \cdot 2 \\ 3\lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = & -4 & \cdot 1 & \\ 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & +\lambda_3 & = & -7 & & \cdot 1 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} -\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & 5 \\ & 2\lambda_2 & +10\lambda_3 & = & 11 \\ & & 7\lambda_3 & = & 3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \frac{3}{7} \\ \lambda_2 = \frac{11-10\lambda_3}{2} = \frac{11-10\cdot\frac{3}{7}}{2} = \frac{47}{14} \\ \lambda_1 = \lambda_2+3\lambda_3-5 = \frac{47}{14}+3\cdot\frac{3}{7}-5 = -\frac{5}{14} \end{cases}$$

$$\vec{w} = -\frac{5}{14}\cdot\vec{u}_1+\frac{47}{14}\cdot\vec{u}_2+\frac{3}{7}\cdot\vec{u}_3$$

Exercice 2-20 a)

Montrons d'abord que la famille (l_0, l_1, l_2) est libre en nous inspirant de l'exercice 2-14.

Il faut montrer que $a_0\cdot l_0+a_1\cdot l_1+a_2\cdot l_2 = 0$ implique $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. L'hypothèse signifie que $p(x) = a_0\cdot l_0(x)+a_1\cdot l_1(x)+a_2\cdot l_2(x) = 0$ pour tous les nombres réels x, en particulier $p(0) = 0,\ p(1) = 0\ et\ p(2) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_0 \qquad\qquad = 0 \\ \quad a_1 \qquad = 0 \\ \qquad a_2 = 0 \end{cases}$$

, ce qui démontre que la famille (l_0, l_1, l_2) est linéairement indépendante. En particulier $dim(P_2)\geqslant 3$.

Pour montrer que la famille (l_0, l_1, l_2) est génératrice, on peut passer par le raisonnement suivant.

La famille (e_0, e_1, e_2) où $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2$ est une famille génératrice de P_2 , ce qui prouve que $dim(P_2)\leqslant 3$. Ainsi, $dim(P_2) = 3$. D'après la Proposition de la page 11, puisque la famille (l_0, l_1, l_2) est libre, elle est une base de E.

Exercice 2-20 b)

Existence : $p(x) = a_0\cdot l_0(x)+a_1\cdot l_1(x)+a_2\cdot l_2(x)$ possède les propriétés suivantes : $p(0) = a_0$, $p(1) = a_1$ et $p(2) = a_2$.

Unicité : soient $p_{1,}p_2\in P_2$ tels que $p_1(0) = p_2(0) = a_0$, $p_1(1) = p_2(1) = a_1$ et $p_1(2) = p_2(2) = a_2$. Alors, la différence $d = p_1-p_2$ est un polynôme possédant au moins trois zéros en 0, 1 et 2, donc divisible par x, x-1 et x-2, c'est-à-dire $d(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot q(x)$ où q est un polynôme. Mais, puisque $d\in P_2$, il est nécessaire que $q = 0$. Donc $d = 0$ et $p_1 = p_2$.

Exercice 2-20 c)

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad ,$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad .$$

Exercice 2-20 d)

Le polynôme de P_2 qui passe par les trois points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifiant $x_0 < x_1 < x_2$ peut être directement exprimé au moyen de la base de Lagrange : $p = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2$.

Exercice 2-21 a)

A titre d'exemple, vérifions la propriété 1.1 du § 2.1 (p. 2) :
$\forall f, g, h \in A \quad (f+g)+h = f+(g+h)$, c'est-à-dire : quelles que soient les fonctions f, g, h , $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$.

Or, cette dernière égalité est valide puisque l'addition dans $\mathbb{R}$ est associative.

Exercice 2-21 b)

Montrons que P est stable pour l'addition : soient $p, q \in P$. La somme de deux polynômes étant un polynôme, on a $(p+q) \in P$.

Montrons que H est stable pour la multiplication par un scalaire : soient $p \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; le produit d'un polynôme par un scalaire étant un polynôme, il s'ensuit que $(\lambda \cdot p) \in P$.

Exercice 2-21 c)

Montrons que la famille des polynômes de Lagrange $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est libre en nous inspirant de l'exercice 2-20.

Il faut montrer que $a_0 \cdot L_0 + a_1 \cdot L_1 + \ldots + a_n \cdot L_n = 0$ implique $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. L'hypothèse signifie que $p(x) = a_0 \cdot L_0(x) + a_1 \cdot L_1(x) + \ldots + a_n \cdot L_n(x) = 0$ pour tous les nombres réels x, en particulier $p(x_0) = 0,\ p(x_1) = 0\ , \ldots,\ p(x_n) = 0$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{matrix} a_0 & & & & = 0 \\ & a_1 & & & = 0 \\ & & \ldots & & \\ & & & a_n & = 0 \end{matrix}\right\}$$

, ce qui démontre que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est linéairement indépendante. En particulier $dim(P) \geqslant (n+1)$.
En faisant croître n indéfiniment, $dim(P) = \infty$.

Attendu que $P \subset A$, $dim(P) \leqslant dim(A)$, donc $dim(A) = \infty$.

Exercice 2-22 a) 1°

En supprimant les colonnes 2 et 4, on obtient $\begin{pmatrix} 1\cdot\lambda_1 & +5\cdot\lambda_2 & +3\cdot\lambda_3 & = & 0 \\ \underline{2\cdot\lambda_1} & +6\cdot\lambda_2 & +4\cdot\lambda_3 & = & 0 \\ & +7\cdot\lambda_2 & +5\cdot\lambda_3 & = & 0 \\ & \underline{+8\cdot\lambda_2} & +6\cdot\lambda_3 & = & 0 \\ & & \underline{+7\cdot\lambda_3} & = & 0 \end{pmatrix}$.

Quoique le système ne soit pas triangulaire supérieur, mais en escalier, on peut y faire des raisonnements semblables dans lesquels les éléments diagonaux (ou pivots) sont remplacés par les éléments soulignés appelés « éléments angulaires » :

- de la cinquième ligne, on tire $\lambda_3 = 0$;
- en remplaçant dans la quatrième ligne, on obtient $\lambda_2 = 0$;
- en remplaçant dans la deuxième ligne, on obtient $\lambda_1 = 0$;

donc le système des trois vecteurs-colonnes est libre.

Exercice 2-22 a) 2°

En supprimant les lignes 1 et 3 et en les récrivant en colonnes suivant notre habitude, on obtient $\begin{pmatrix} \underline{2\cdot\lambda_1} & & & = & 0 \\ 4\cdot\lambda_1 & & & = & 0 \\ 6\cdot\lambda_1 & \underline{+8\cdot\lambda_2} & & = & 0 \\ & +2\cdot\lambda_2 & & = & 0 \\ 4\cdot\lambda_1 & +6\cdot\lambda_2 & \underline{+7\cdot\lambda_3} & = & 0 \end{pmatrix}$. Quoique le système ne soit pas triangulaire inférieur, mais en escalier, on peut y faire des raisonnements semblables dans lesquels les éléments diagonaux (ou pivots) sont remplacés par les éléments soulignés appelés « éléments angulaires » :

- de la première ligne, on tire $\lambda_1 = 0$;
- en remplaçant dans la troisième ligne, on obtient $\lambda_2 = 0$;
- en remplaçant dans la cinquième ligne, on obtient $\lambda_3 = 0$;

donc le système des trois vecteurs (vecteurs-lignes dans la donnée, vecteurs-colonnes dans le calcul) est libre.

Exercice 2-22 b)

Les principes de l'exercice 2-22 a) sont généralisables : dans le cas où le système est en escalier, les lignes et les colonnes qui portent les éléments angulaires sont linéairement indépendantes.

Lien vers la page mère

Algèbre linéaire et géométrie analytique
https://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/alga/