Edition 2007-2008 / DELM

Géométrie métrique

§ 2 Produit scalaire - Exercices

□ Liens hypertextes

Cours correspondant de niveau standard:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Cours_standard.pdf

Cours de niveau avancé:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Cours_avance.pdf

Exercices de niveau avancé:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Exercices_avance.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

§ 2.1 Norme d'un vecteur, vecteur unitaire

□ 2 - 1

On donne les coordonnées des points A, B, C dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Calculez le périmètre du triangle ABC.

a) $A(1;\ 3),\quad B(3;\ 0),\quad C(-5;\ -1);$

b) $A\left(2;\ \frac{3}{2}\right),\ B\left(\frac{7}{2};\ \frac{11}{2}\right),\ C\left(10;\ \frac{3}{2}\right).$

□ 2 - 2

Dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne $A(5;\ 2),\quad B(6;\ 3),\quad C(7;\ -5)$.

Calculez l'aire du triangle ABC.

□ 2 - 3

La base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ est orthonormée. Calculez les normes des vecteurs suivants:

$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j},\qquad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j},\qquad \vec{c} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j},\qquad \vec{d} = \vec{a} + \vec{c},\qquad \vec{e} = \vec{c} - 2\,\vec{b},\qquad \vec{f} = 4\,\vec{a} + 3\,\vec{b} - \vec{c},$

$3\,\vec{c},\qquad -7\,\vec{c},\qquad k\,\vec{c}\quad$ où $k \in \mathbb{R}$.

□ 2 - 4

Par rapport à la base orthonormée $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix},\qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \end{pmatrix},\qquad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}.$

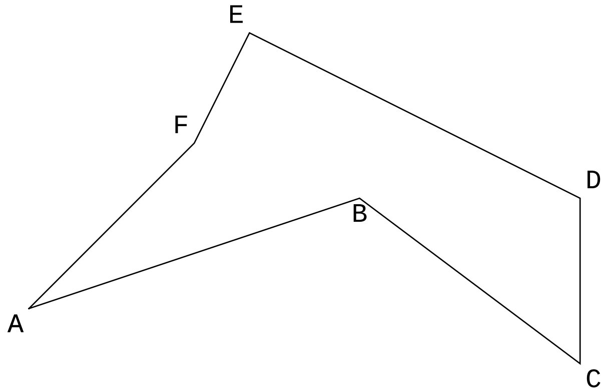
Déterminez les composantes des vecteurs unitaires linéairement dépendants de chacun des vecteurs donnés.

§ 2.2 Produit scalaire de deux vecteurs

Dans les exercices qui suivent, le plan est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ qui est orthonormé.

□ 2 - 5

On donne le polygone ABCDEF.



Représentez graphiquement les angles suivants:

$\alpha_1 = \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)$, $\alpha_2 = \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD}\right)$, $\alpha_3 = \measuredangle\left(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DE}\right)$,

$\alpha_4 = \measuredangle\left(\overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{CD}\right)$, $\alpha_5 = \measuredangle\left(\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{BC}\right)$, $\alpha_6 = \measuredangle\left(\overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{AB}\right)$.

Pour chaque angle, indiquez s'il est aigu, droit ou obtus.

□ 2 - 6

Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants:

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 7$, $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 60°$.

b) $\|\vec{u}\| = 8\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 135°$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

□ 2 - 7

a) On donne $\|\vec{u}\| = \frac{13}{2}$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Calculez $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

b) On donne $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 150°$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -30$. Calculez $\|\vec{u}\|$.

c) On donne $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 78°$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -30$. Calculez $\|\vec{v}\|$.

d) On donne $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Calculez $\|\vec{u}\|$ et $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

e) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 22$. Calculez y.

□ 2 - 8

Le triangle ABC est tel que $c = 2$, $a = 3$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3\sqrt{2}$.

Calculez la mesure de l'angle β ainsi que la longueur du côté b.

□ 2 - 9

ABC est un triangle isocèle où AC = BC = 5 cm et AB = 8 cm.

Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

□ 2 - 10

ABCD est un carré de côté a et de centre O.

Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CO}$.

□ 2 - 11

Démontrez la proposition suivante: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 \right)$.

<u>Indication</u>: développez le carré scalaire $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \ ....$

□ 2 - 12

Dans chacun des cas suivants, dites si les deux vecteurs sont orthogonaux. Sinon, calculez l'angle entre les vecteurs:

a) $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{7}{3}\vec{i} + \frac{7}{4}\vec{j}$.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

□ 2 - 13

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculez les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $\vec{w} \cdot \vec{z}$.

b) Calculez $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w}$, $\left(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\right) \cdot \vec{z}$, $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{z}\right)$.

c) Calculez les angles $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$, $\measuredangle\left(\vec{v},\ \vec{w}\right)$, $\measuredangle\left(\vec{w},\ \vec{z}\right)$, $\measuredangle\left(\vec{u} + \vec{v},\ \vec{w}\right)$.

□ 2 - 14

Déterminez, dans chacun des cas, la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 - 3x \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} x + 5 \\ -1 - 3x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3x+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$.

□ 2 - 15

On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminez a, b pour que $\| \vec{u} \| = 8$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Représentez graphiquement la situation.

□ 2 - 16

a) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminez a, b afin que $\vec{u}, \vec{v}$ soient linéairement dépendants et $\| \vec{u} \| = 3$.

b) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminez a, b afin que $\vec{u}, \vec{v}$ soient orthogonaux et $\| \vec{u} \| = 3$.

□ 2 - 17

Soient $A(-6;\ -8)$, $B(3;\ 4)$, $C(9;\ -2)$ les sommets d'un triangle. G est le centre de gravité du triangle.

a) Déterminez les coordonnées de G.

b) Vérifiez l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GB}} = -\overrightarrow{\mathrm{GA}}^2$.

c) Calculez la mesure de l'angle $\widehat{AGB}$.

□ 2 - 18

Par rapport à la base orthonormée $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne le vecteur $\vec{u} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$.

Déterminez une nouvelle base orthonormée $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$ telle que

$\vec{a}$ ait la même direction et le même sens que $\vec{u}$ et

$\vec{b}$ soit l'image de $\vec{a}$ par une rotation de 90° dans le sens direct.