Géométrie métrique

Edition 2007-2008 / DELM

§ 2 Produit scalaire

■ Liens hypertextes

Exercices correspondants de niveau avancé:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Exercices_avance.pdf

Cours de niveau standard:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Cours_standard.pdf

Exercices de niveau standard:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Exercices_standard.pdf

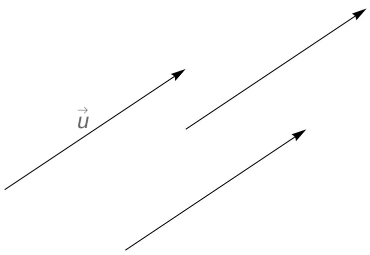
Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

§ 2.1 Norme d'un vecteur, vecteur unitaire

■ Norme d'un vecteur

Nous avons étudié, en première année, que l'on peut représenter un vecteur par des flèches. Celles-ci représentent le même vecteur si elles ont

la même direction,
le même sens et
la même longueur.



Le vecteur $\vec{0}$ est représenté par un point.

Définition: la longueur du vecteur $\vec{u}$ est appelée norme de $\vec{u}$ et est notée $\|\vec{u}\|$.

■ Propriétés de la norme

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et pour tous les nombres réels k, on a

$$\|\vec{u}\| \geq 0$$

$$\|\vec{u}\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{0}$$

$$\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

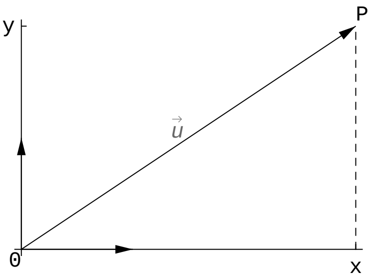
Cette propriété est appelée <u>inégalité triangulaire</u> car pour tout triangle (éventuellement dégénéré), la longueur d'un côté est supérieure ou égale à la différence des longueurs des deux autres côtés mais inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. Le lecteur est invité à illustrer cette propriété.

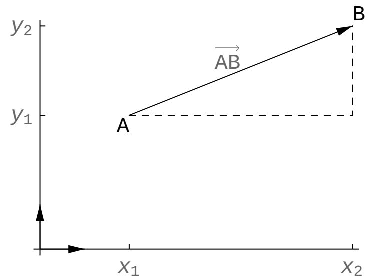
■ Expression de la norme dans un repère orthonormé

Par rapport à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne les points $P(x,\ y)$, $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ et on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$





$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

<u>Exemple</u>: La distance entre les points $A(-2;\ 3)$ et $B(4;\ -5)$ est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -5 - 3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

<u>Remarque</u>: Attention

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \qquad \text{mais}$$

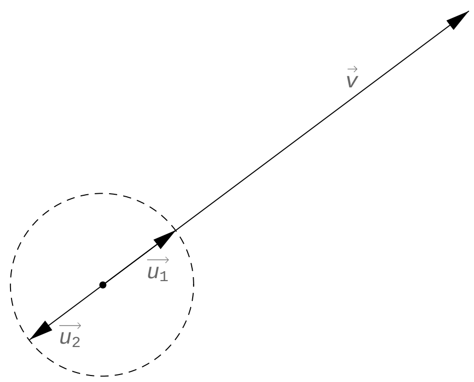
$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

■ Vecteur unitaire

<u>Définition</u>: un vecteur <u>unitaire</u> est un vecteur dont la norme est égale à 1.

<u>Exemple</u>: le vecteur $\begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}$ est unitaire car $\sqrt{0.8^2 + (-0.6)^2} = 1$.

<u>Proposition</u>: un vecteur non nul $\vec{v}$ étant donné, il existe exactement deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ qui sont à la fois liés à $\vec{v}$ et unitaires.



<u>En effet</u>, nous cherchons des vecteurs de la forme $k \cdot \vec{v}$ qui sont unitaires

$$\| k \cdot \vec{v} \| = 1 \iff | k | \cdot \| \vec{v} \| = 1 \iff | k | = \frac{1}{\| \vec{v} \|}$$

On obtient deux solutions

$$k_1 = \frac{1}{\| \vec{v} \|} \quad \text{ou} \quad k_2 = \frac{-1}{\| \vec{v} \|}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\| \vec{v} \|} \vec{v}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overrightarrow{u_2} = \frac{-1}{\| \vec{v} \|} \vec{v}}$$

§ 2.2 Produit scalaire de deux vecteurs

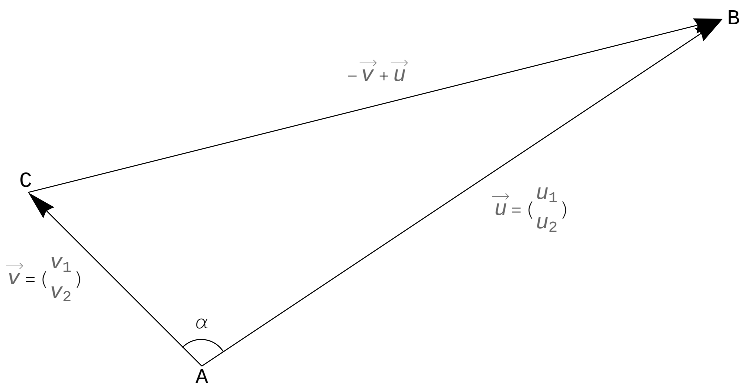
■ Rappel du théorème du cosinus

Dans le théorème du cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos(\alpha)$, le terme $-2\, b\, c \cos(\alpha)$ représente la correction à apporter au théorème de Pythagore. Isolons la moitié de ce terme correctif:

$$\boxed{b\, c \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \left(b^2 + c^2 - a^2\right)}$$

C'est cette forme du théorème du cosinus que nous allons appliquer au triangle formé par deux vecteurs.

■ Théorème du cosinus pour deux vecteurs



Il s'agit de récrire le théorème du cosinus avec les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$\overrightarrow{AC} = \vec{v}$; $\quad b = \| \vec{v} \|$;

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $c = \| \vec{u} \|$;
$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{v} + \vec{u}$; $a = \| \vec{u} - \vec{v} \|$;
L'angle α désigne l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Le théorème du cosinus devient

$$\| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \| \cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - \left\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \right\|^2 \right)$$

Le membre de droite peut s'exprimer avec les composantes des vecteurs par rapport à une base orthonormée

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - \left\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \right\|^2 \right) &= \frac{1}{2}\left((u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - ((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2) \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 + 2\,u_1\,v_1 - v_1^2 - u_2^2 + 2\,u_2\,v_2 - v_2^2 \right) \\ &= u_1\,v_1 + u_2\,v_2\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \| \cos(\alpha) = u_1\,v_1 + u_2\,v_2}$$

Définitions du produit scalaire

Chacun des deux membres de l'équation précédente est dénommé produit scalaire et est noté $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v}$

Ainsi, par rapport à une base orthonormée, en notant $\alpha = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \,.\, \vec{v} = \| \vec{u} \| \; \| \vec{v} \| \; \cos(\alpha) \\ \vec{u} \,.\, \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \end{array}}$$

(Voir *Formulaires et tables*)

Dans le cas particulier où $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on convient que $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = 0$.

Signe du produit scalaire, orthogonalité

En tenant compte des propriétés de la norme dans l'expression $\| \vec{u} \| \; \| \vec{v} \| \; \cos(\alpha)$, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0} \ \text{ et } \cos(\alpha) > 0 \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0} \ \text{ et } \alpha \text{ est } \underline{\text{aigu}} \right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0} \ \text{ et } \cos(\alpha) < 0 \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0} \ \text{ et } \alpha \text{ est } \underline{\text{obtus}} \right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{u} = \vec{0},\ \vec{v} = \vec{0} \ \text{ ou } \cos(\alpha) = 0 \right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{u} = \vec{0},\ \vec{v} = \vec{0} \ \text{ ou } \alpha \text{ est } \underline{\text{droit}} \right)\end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

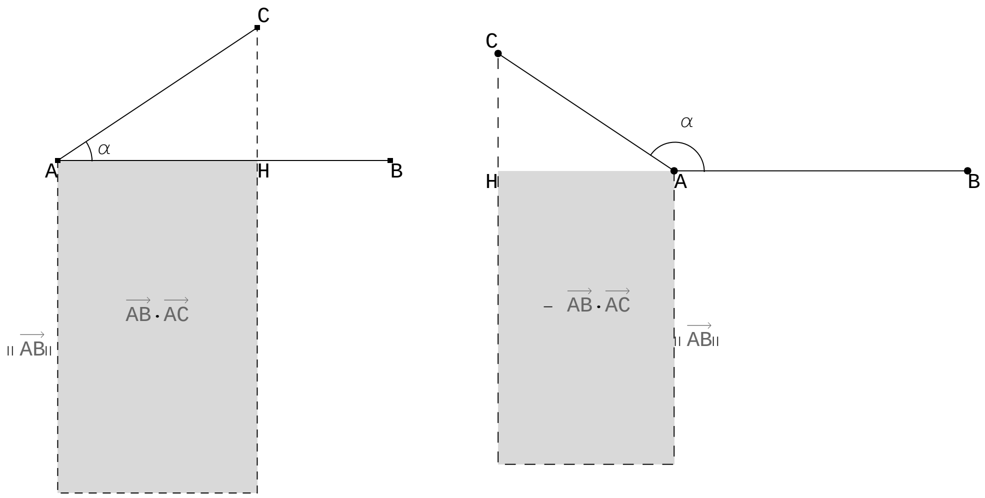
En composantes dans une base orthonormée

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad u_1\,v_1 + u_2\,v_2 = 0}$$

Interprétation géométrique du produit scalaire

Dans la figure suivante, H est le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur la droite AB (on dit alors que $\overrightarrow{AH}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$).

Perpendiculairement à AB en A, on a reporté la longueur de AB (il s'agit plus précisément de l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une rotation de 90° dans le sens rétrograde autour de A).



Dans le cas où l'angle α est aigu, l'aire de la surface grisée représente le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \left(\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha)\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Dans le cas où l'angle α est obtus, l'aire de la surface grisée est égale à l'opposé du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \left(\|\overrightarrow{AC}\| \cos(180° - \alpha)\right) =$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \left(-\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha)\right) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

■ Propriétés du produit scalaire

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous les nombres réels k, on a

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$ (distributivité)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$ (commutativité)

$$\left(k\,\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \left(k\,\vec{v}\right) = k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$$

$$\vec{u}^{\,2} = \left(\|\vec{u}\|\right)^2$$ (le carré scalaire est égal au carré de la norme)

Pour les démonstrations, on peut exprimer tous les vecteurs dans une base orthonormée. Par exemple, pour la commutativité, exprimons chacun des deux membres en composantes puis comparons:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = v_1\,u_1 + v_2\,u_2,$$ ce qui établit l'égalité.

Le lecteur est invité à démontrer les autres propriétés.

■ Exemple 1 (problème résolu)

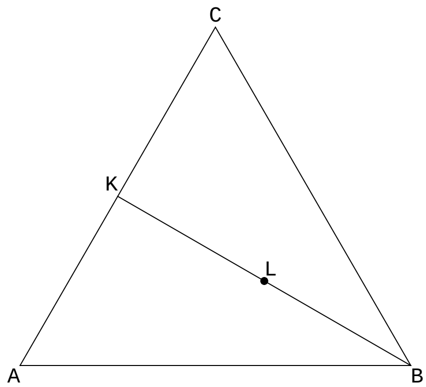
Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2;\ 3)$, $B(5;\ 1)$, $C(0;\ -3)$. Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-6) = 26$$

■ Exemple 2 (problème résolu)

ABC est un triangle équilatéral de 6 cm de côté; K est le milieu du segment AC; L est le milieu du segment KB.

Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{KB}$,



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\ \|\overrightarrow{AC}\| \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right) = 6 \cdot 6 \cdot \cos(60°) = 18$$

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BK}\|\ \|\overrightarrow{BC}\| \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}\right)\right) = \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot 6 \cdot \cos(30°) = 27$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BL} = \|\overrightarrow{AB}\|\ \|\overrightarrow{BL}\| \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BL}\right)\right) = 6 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(150°) = -\frac{27}{2}$$

$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{KB}$ donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{KB} = 0$

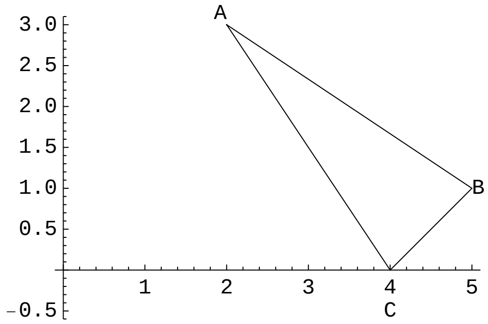
■ Angle entre deux vecteurs

De la définition du produit scalaire, on tire

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}}$$

■ Exemple 3 (problème résolu)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2;\ 3)$, $B(5;\ 1)$, $C(4;\ 0)$. Calculez les angles du triangle.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AB} \| \; \| \overrightarrow{AC} \|} = \frac{3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3)}{\sqrt{3^3 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{\sqrt{13} \sqrt{13}} = \frac{12}{13}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{12}{13}\right) \approx 22.62\,°$$

Durant le calcul précédent, on aura remarqué que le triangle est isocèle. Par suite

$$\beta = \gamma = \frac{180\,° - \alpha}{2} \approx 78.69\,°$$

■ Produit scalaire et théorème du cosinus

C'est en appliquant le théorème du cosinus à la géométrie vectorielle que nous avons construit le produit scalaire. Celui-ci est donc apparu comme une conséquence du théorème du cosinus. Nous montrons maintenant que la réciproque est vraie, à savoir que le théorème du cosinus peut se déduire des propriétés du produit scalaire. En effet, pour un triangle de sommets ABC, en utilisant les notations usuelles, on a

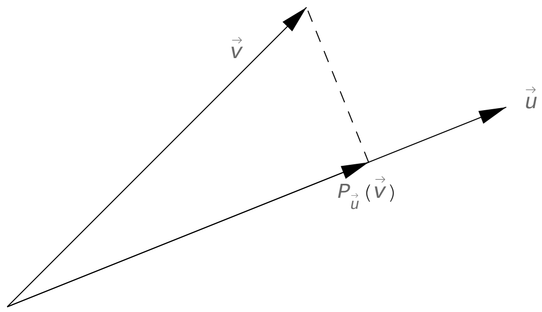
$$\begin{aligned} a^2 &= \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\ &= \overrightarrow{BA}^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 - 2\,\| \overrightarrow{AB} \| \; \| \overrightarrow{AC} \| \cos(\alpha) + \overrightarrow{AC}^2 \\ &= c^2 - 2\,c\,b\cos(\alpha) + b^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Ceci montre que, en calcul vectoriel, il est possible de se passer du théorème du cosinus. Il est d'usage de remplacer ce dernier par les propriétés du produit scalaire.

§ 2.3 Projections orthogonales *[Niveau avancé]*

■ Définition

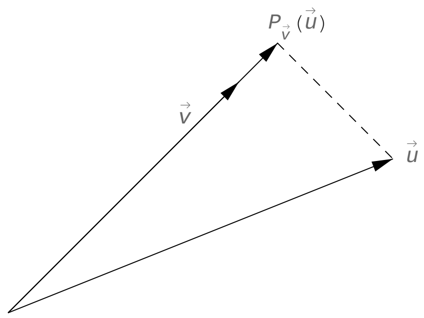
Etant donné deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, on définit la projection orthogonale $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)$ du vecteur $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$ de la manière suivante (les vecteurs représentés ont une origine commune):



1) de l'extrémité de $\vec{v}$, on abaisse une perpendiculaire sur le support de $\vec{u}$;

2) $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)$ est un multiple de $\vec{u}$.

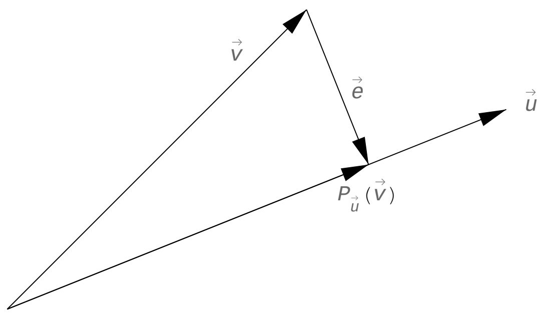
<u>Attention</u>: la projection orthogonale $P_{\vec{v}}\left(\vec{u}\right)$ du vecteur $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$ donne généralement un tout autre vecteur:



Dans une projection orthogonale, il est essentiel de bien repérer où se trouve l'angle droit.

■ Calcul

La détermination de la projection orthogonale $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)$ du vecteur $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$ est basée sur les relations suivantes



1) $\vec{e} \perp \vec{u}$ où $\vec{e} = -\vec{v} + P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)$

2) $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) = k\,\vec{u}$

La première relation s'écrit aussi

$$\left(-\vec{v} + P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)\right) \cdot \vec{u} = 0$$

En substitutant la deuxième dans la première, il vient sucessivement

$$\left(-\vec{v} + k\,\vec{u}\right) \bullet \vec{u} = 0$$

$$-\vec{v} \bullet \vec{u} + k\,\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$$

$$k\,\vec{u}^{\,2} = \vec{v} \bullet \vec{u}$$

$$k = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u}^{\,2}}$$

D'après la deuxième relation

$$\boxed{P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u}^{\,2}}\,\vec{u}}$$

(Voir *Formulaires et tables*)

<u>Remarque:</u> En écrivant en composantes

$$P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) = \frac{v_1\,u_1 + v_2\,u_2}{u_1^2 + u_2^2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

on voit bien que, dans l'expression $\frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u}^{\,2}}\,\vec{u}$, il n'est pas possible de simplifier par $\vec{u}$.