3-ème année, mathématiques niveau avancé

Edition 2004-2005

§ 3 Produit vectoriel

■ Liens hypertextes

Produit scalaire 3D:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Geom3D/ProduitScalaire3D.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

3.1 Construction

■ Définition géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs

Etant donné deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$, on appelle produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ le vecteur $\vec{c}$, noté $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, défini de la manière suivante:

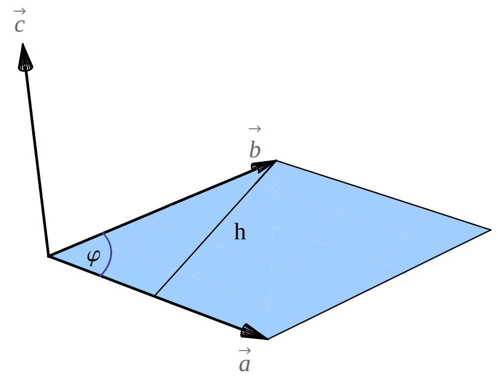
dans le cas où $\vec{a}, \vec{b}$ ne sont pas colinéaires,

la direction de $\vec{c}$ est définie par $\vec{c} \perp \vec{a}$ et $\vec{c} \perp \vec{b}$;

le sens de $\vec{c}$ est tel que que le triplet $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ est direct, c'est-à-dire obéit à la règle de la main droite;

la norme de $\vec{c}$ est égale à l'aire du parallélogramme sous-tendu par $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, c'est-à-dire

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin(\varphi)| \quad \text{où} \quad \varphi = \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right);$$



dans le cas où $\vec{a}, \vec{b}$ sont colinéaires, on a $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ ou $\sin(\varphi) = 0$; c'est pourquoi on pose

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

■ Propriétés

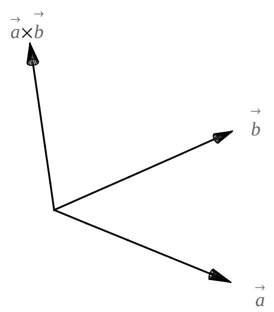
Première propriété

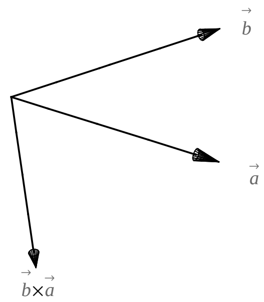
Il découle de la définition que, pour tout vecteur $\vec{a}$, on a

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

Deuxième propriété

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \qquad \text{(antisymétrie)}$$

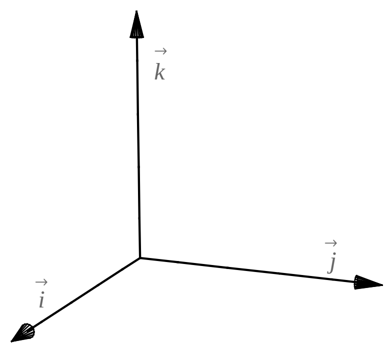




Troisième propriété

Pour toute base orthonormée directe $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on a

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \text{(règle des permutations cycliques)}$$



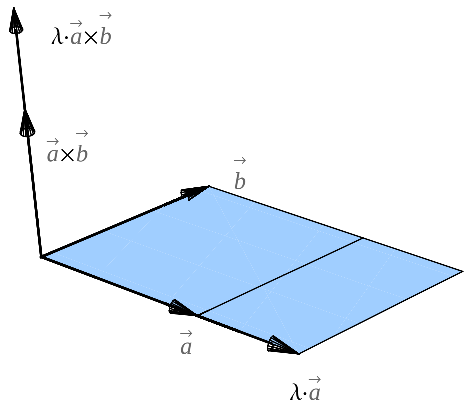
En combinant les propriétés 2 et 3, on obtient

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

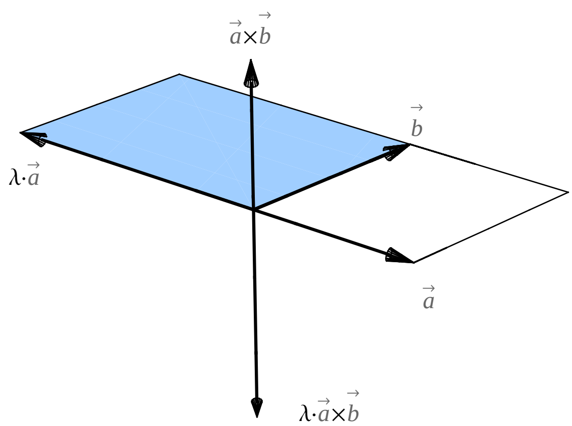
<u>Quatrième propriété</u>

$$\left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} = \lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Dans le cas où $\lambda > 0$, la direction et le sens des deux expressions précédentes sont les mêmes; pour la norme, lorsqu'on multiplie le côté $\vec{a}$ par λ, l'aire du parallélogramme est multilpliée par λ (dans la figure, $\lambda = 1.6$):



Lorsque $\lambda < 0$, les sens des deux membres sont inversés; en effet, pour le membre de gauche, si $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$ est direct, c'est alors $\left(-\vec{a},\ \vec{b},\ -\vec{c}\right)$ qui est direct (dans la figure, $\lambda = -1.6$):



D'une manière analogue, on montre que

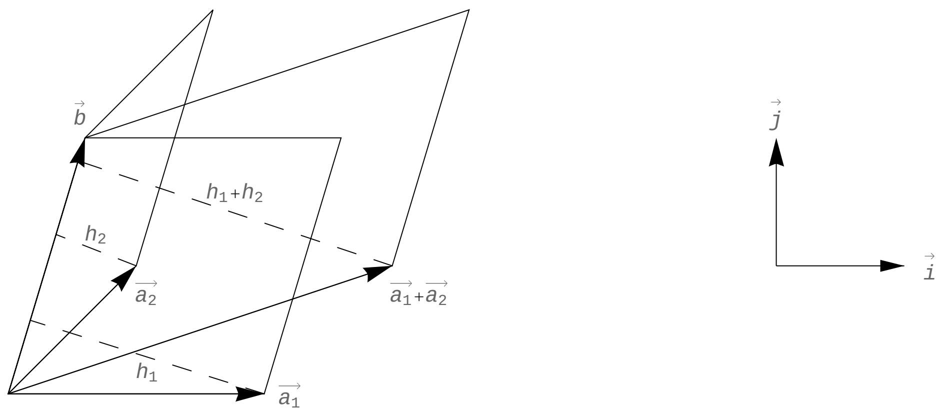
$$\vec{a} \times \left(\mu \cdot \vec{b}\right) = \mu \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

<u>Cinquième propriété</u>

$$\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}\right)\times\vec{b}=\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}+\overrightarrow{a_2}\times\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\left(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}\right)=\vec{a}\times\overrightarrow{b_1}+\vec{a}\times\overrightarrow{b_2}$$

Démontrons la propriété dans le cas particulier où les vecteurs $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\vec{b}$ sont coplanaires.



Dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ dont les deux premiers vecteurs sont dans le plan de la figure, les produits vectoriels sont des multiples de $\vec{k}$. Pour le cas de figure représenté,

$$\left\|\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}+\overrightarrow{a_2}\times\vec{b}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\\left\|\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}\right\|\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\left\|\overrightarrow{a_2}\times\vec{b}\right\|\end{pmatrix}\right\|=\left\|\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}\right\|+\left\|\overrightarrow{a_2}\times\vec{b}\right\|=$$

$$h_1\cdot\left\|\vec{b}\right\|+h_2\cdot\left\|\vec{b}\right\|=(h_1+h_2)\cdot\left\|\vec{b}\right\|=\left\|\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}\right)\times\vec{b}\right\|$$

Il y a d'autres cas de figures à envisager: il est possible que les deux aires doivent se soustraire, mais la démonstration demeure semblable.

Quant au cas où les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, nous renonçons à donner une démonstration, mais nous effectuerons des vérifications au § 3.2.

On regroupe les propriétés 4 et 5 en disant que le produit vectoriel est bilinéaire.

■ Expression analytique du produit vectoriel (ou définition algébrique du produit vectoriel)

En utilisant les propriétés précédentes, nous pouvons exprimer le produit vectoriel en composantes dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$. Pour

$$\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{gathered}\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}\right) \times \left(b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k}\right) = \\ a_1\,b_1\,\vec{i}\times\vec{i} + a_1\,b_2\,\vec{i}\times\vec{j} + a_1\,b_3\,\vec{i}\times\vec{k} + a_2\,b_1\,\vec{j}\times\vec{i} + \\ a_2\,b_2\,\vec{j}\times\vec{j} + a_2\,b_3\,\vec{j}\times\vec{k} + a_3\,b_1\,\vec{k}\times\vec{i} + a_3\,b_2\,\vec{k}\times\vec{j} + a_3\,b_3\,\vec{k}\times\vec{k} = \\ \vec{0} + a_1\,b_2\,\vec{k} + a_1\,b_3\left(-\vec{j}\right) + a_2\,b_1\left(-\vec{k}\right) + \vec{0} + a_2\,b_3\,\vec{i} + a_3\,b_1\,\vec{j} + a_3\,b_2\left(-\vec{i}\right) + \vec{0} = \\ (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,\vec{i} + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,\vec{j} + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\vec{k}\end{gathered}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix}}$$

(Voir *Formulaires et tables*)

3.2 Vérifications

Puisque, dans l'établissement de la formule du produit vectoriel, nous avons sauté une démonstration, effectuons des vérifications.

■ L'expression analytique du produit vectoriel possède les 5 propriétés du § 3.1

Ces vérifications sont laissées au soin du lecteur.

■ L'expression analytique du produit vectoriel vérifie la définition géométrique

Direction

$$\begin{gathered}\vec{c} \cdot \vec{a} = \\ \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,a_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,a_2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,a_3 = \\ a_1\,a_2\,b_3 - a_1\,a_3\,b_2 + a_2\,a_3\,b_1 - a_1\,a_2\,b_3 + a_1\,a_3\,b_2 - a_2\,a_3\,b_1 = 0 \quad \text{Donc} \quad \vec{c} \perp \vec{a}\end{gathered}$$

D'une manière analogue $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Retenons le résultat:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{a} \quad \text{et} \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{b}$$

<u>Sens</u>

Pour la base canonique $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, la vérification de la troisième propriété établit que le sens est correct.

Nous reparlerons du cas général dans le § 4 en utilisant le critère du déterminant.

<u>Norme</u>

Nous allons démontrer que

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\ \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\varphi)$$

En effet, d'une part

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$$
$$a_2^2 b_1^2 + a_3^2 b_1^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_3^2 b_2^2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2$$

D'autre part,

$$\|\vec{a}\|^2\ \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\varphi) = \|\vec{a}\|^2\ \|\vec{b}\|^2 \left(1 - \cos^2(\varphi)\right) =$$
$$\|\vec{a}\|^2\ \|\vec{b}\|^2 - \left(\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\| \cos(\varphi)\right)^2 = \|\vec{a}\|^2\ \|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 =$$
$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$
$$a_2^2 b_1^2 + a_3^2 b_1^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_3^2 b_2^2 -$$
$$2 a_1 a_3 b_1 b_3 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2$$

ce qui établit l'égalité suivante dans laquelle φ désigne l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\boxed{\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\left|\sin(\varphi)\right|}$$

(Voir *Formulaires et tables*)

Géométriquement, la norme du produit vectoriel $\vec{a}\times\vec{b}$ représente l'aire du parallélogramme sous-tendu par les vecteurs $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$, ce que nous notons comme suit:

$$\text{Aire}\left(\text{parallélogramme}\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)\right) = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

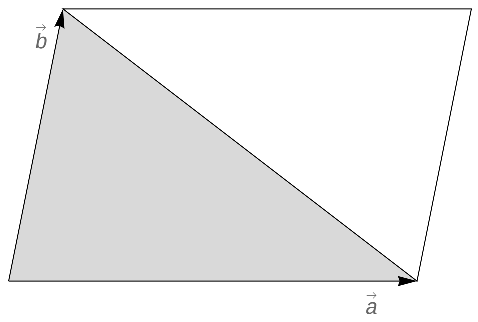
<u>Cas particulier de deux vecteurs colinéaires</u>

Si, par exemple, $\vec{b} = \lambda\cdot\vec{a}$, alors

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \lambda a_3 - a_3 \lambda a_2 \\ a_3 \lambda a_1 - a_1 \lambda a_3 \\ a_1 \lambda a_2 - a_2 \lambda a_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Applications du produit vectoriel

Aire d'un triangle

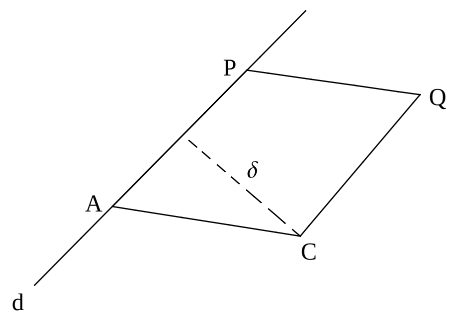


Géométriquement l'aire du triangle sous-tendu par les vecteurs $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$ est égal à la moitié de l'aire du parallélogramme sous-tendu par les vecteurs $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$

$$\text{Aire}\left(\text{triangle}\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)\right) = \frac{1}{2}\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|$$

Distance d'un point à une droite

Soit C un point de l'espace et d une droite dont un point d'attache est A et un vecteur directeur est $\vec{d}$. Notons $\delta = \text{dist}(C,\ d)$ la distance du point C à la droite d.



Introduisons les points P et Q définis par $\vec{d} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CQ}$. L'aire du parallélogramme $APQC$ est égal,

d'une part à $\delta \cdot \left\|\vec{d}\right\|$;

d'autre part à $\left\|\vec{d} \times \overrightarrow{AC}\right\|$. Donc

$$\boxed{\delta = \frac{\left\|\vec{d} \times \overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\vec{d}\right\|}}$$ (Voir *Formulaires et tables*)

§ 4 Déterminant

■ Définition du déterminant (ou produit mixte)

Le produit mixte suivant est appelé déterminant

$$\boxed{\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}}$$

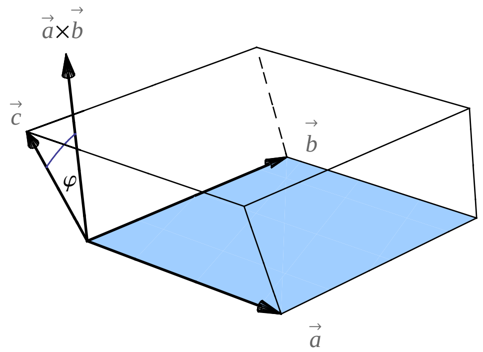
(Voir *Formulaires et tables*)

■ Interprétation géométrique du déterminant

Interprétons d'abord la <u>valeur absolue du déterminant</u>:

$$\left|\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right| = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \cdot \left\|\vec{c}\right\| \cdot \cos(\varphi) = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \cdot h$$

où φ désigne l'angle entre $\vec{a} \times \vec{b}$ et $\vec{c}$ tandis que $h = \left\|\vec{c}\right\| \cdot \cos(\varphi)$ représente la hauteur du parallélépipède dont l'aire de la base est $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|$:



La valeur absolue du déterminant représente le volume du parallélépipède sous-tendu par les vecteurs $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$, ce que nous notons comme suit:

$$\mathrm{Vol}\left(\text{parallélépipède}\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right) = \left|\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|$$

Interprétons maintenant le <u>signe du déterminant</u>:

$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) > 0 \iff \cos(\varphi) > 0$

la base $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$ est directe (c'est-à-dire obéit à la règle de la main droite);

$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) < 0 \iff \cos(\varphi) < 0$

la base $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$ est rétrograde;

$$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ ou } \vec{c} = 0 \text{ ou } \cos(\varphi) = 0$$

$$\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) \text{ est un système linéairement dépendant.}$$

Plus rigoureusement, on établit d'abord que les bases se subdivisent en deux classes disjointes, selon leur orientation. La règle de la main droite permet ensuite de sélectionner la classe des bases directes.

■ Propriétés du déterminant

Les propriétés suivantes découlent de la définition, plus particulièrement des propriétés du produit vectoriel et du produit scalaire:

$$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

$$\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) \text{ est linéairement dépendant} \quad \Longleftrightarrow \quad \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = 0$$

$$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) \text{ est une base}$$

Le déterminant est <u>multilinéaire</u>, c'est-à-dire qu'il est linéaire pour chacun de ses arguments:

$$\det\left(\lambda \cdot \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = \lambda \cdot \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right),$$

$$\det\left(\vec{a},\ \mu \cdot \vec{b},\ \vec{c}\right) = \mu \cdot \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right), \quad \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \nu \cdot \vec{c}\right) = \nu \cdot \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$$

$$\det\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = \det\left(\overrightarrow{a_1},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) + \det\left(\overrightarrow{a_2},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$$

$$\det\left(\vec{a},\ \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2},\ \vec{c}\right) = \det\left(\vec{a},\ \overrightarrow{b_1},\ \vec{c}\right) + \det\left(\vec{a},\ \overrightarrow{b_2},\ \vec{c}\right)$$

$$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2}\right) = \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{c_1}\right) + \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{c_2}\right)$$

Le déterminant est <u>alterné</u>, c'est-à-dire si on permute deux vecteurs-colonnes, le signe du déterminant est inversé:

$$\det\left(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c}\right) = -\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right), \quad \det\left(\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}\right) = -\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right),$$

Le déterminant est <u>normé</u>, c'est-à-dire que le déterminant d'une base orthonormée directe vaut 1:

$$\text{si } \left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right) \text{ est une base orthonormée directe}, \quad \det\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right) = 1$$

■ Expression analytique du déterminant

Par rapport à une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, introduisons les notations:

$$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Au moyen des propriétés précédentes, exprimons le déterminant en fonction des composantes des vecteurs:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det\left(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k},\ b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},\ c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\right) =$$

$$a_1 \det\left(\vec{i},\ b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},\ c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\right) +$$

$$a_2 \det\left(\vec{j},\ b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},\ c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\right) +$$

$$a_3 \det\left(\vec{k},\ b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},\ c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\right) =$$

$$a_1 \det\left(\vec{i},\ b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},\ c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\right) + a_2 \det\left(\vec{j},\ b_1 \vec{i} + b_3 \vec{k},\ c_1 \vec{i} + c_3 \vec{k}\right) +$$

$$a_3 \det\left(\vec{k},\ b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j},\ c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j}\right) =$$

$$a_1 b_2 \det\left(\vec{i},\ \vec{j},\ c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\right) + a_1 b_3 \det\left(\vec{i},\ \vec{k},\ c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}\right) +$$

$$a_2 b_1 \det\left(\vec{j},\ \vec{i},\ c_1 \vec{i} + c_3 \vec{k}\right) + a_2 b_3 \det\left(\vec{j},\ \vec{k},\ c_1 \vec{i} + c_3 \vec{k}\right) +$$

$$a_3 b_1 \det\left(\vec{k},\ \vec{i},\ c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j}\right) + a_3 b_2 \det\left(\vec{k},\ \vec{j},\ c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j}\right) =$$

$$a_1 b_2 c_3 \det\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right) + a_1 b_3 c_2 \det\left(\vec{i},\ \vec{k},\ \vec{j}\right) +$$

$$a_2 b_1 c_3 \det\left(\vec{j},\ \vec{i},\ \vec{k}\right) + a_2 b_3 c_1 \det\left(\vec{j},\ \vec{k},\ \vec{i}\right) +$$

$$a_3 b_1 c_2 \det\left(\vec{k},\ \vec{i},\ \vec{j}\right) + a_3 b_2 c_1 \det\left(\vec{k},\ \vec{j},\ \vec{i}\right) =$$

$$a_1 b_2 c_3 \cdot 1 + a_1 b_3 c_2 \cdot (-1) + a_2 b_1 c_3 \cdot (-1) + a_2 b_3 c_1 \cdot (-1)^2 +$$
$$a_3 b_1 c_2 \cdot (-1)^2 + a_3 b_2 c_1 \cdot (-1)^3 =$$
$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

Le résultat obtenu peut s'exprimer au moyen de la **règle de Sarrus** (Voir *Formulaires et tables*):

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1}$$

■ Déterminant de la matrice transposée

On appelle matrice 3×3 un tableau de nombres réels formé de 3 lignes et 3 colonnes:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

On appelle transposée d'une matrice la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{tr}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément l'égalité suivante: le déterminant de la matrice transposée est égal au déterminant de la matrice:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

■ Développements en mineurs

On pourra vérifier que les expressions suivantes sont égales (**développement selon la première colonne**)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

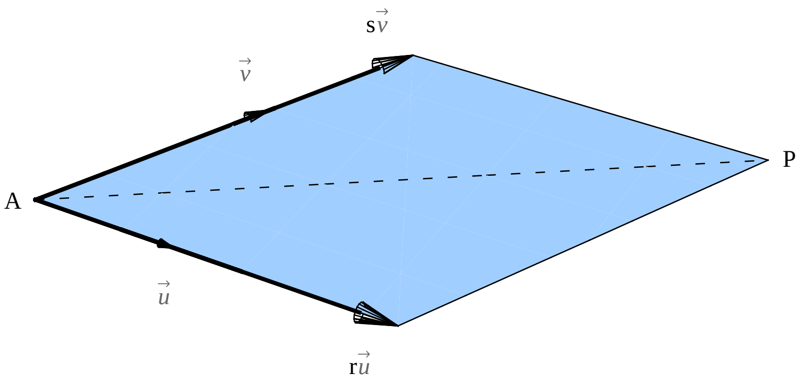
(Voir *Formulaires et tables*). De même pour le **développement selon la première ligne**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

■ Applications du déterminant

Equation cartésienne du plan

L'équation cartésienne du plan défini par le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ où $A(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ peut être calculée au moyen du déterminant. Le point $P(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AP} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AP})$ sont colinéaires:



Par suite, le point $P(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si

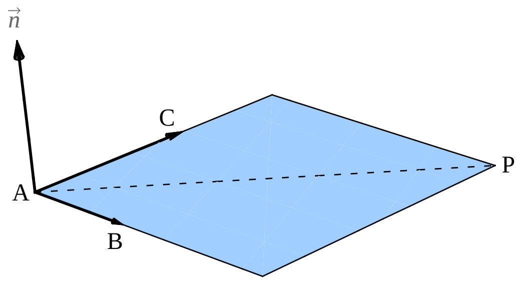
$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AP}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - x_1 \\ u_2 & v_2 & y - y_1 \\ u_3 & v_3 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Dans le cas d'un plan défini par 3 points $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, il suffit de substituer $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, dans les formules précédentes

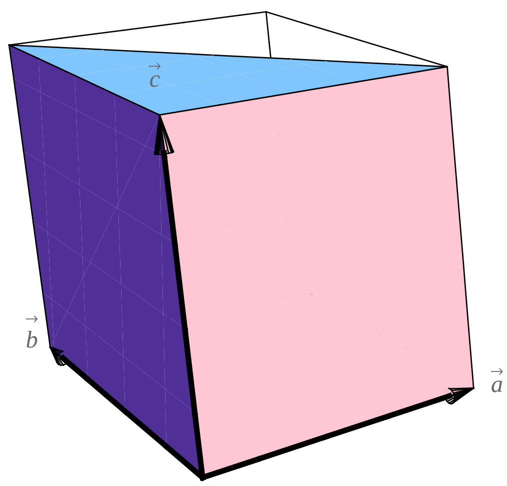
$$\boxed{\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AP} = 0}$$



Dans $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, on reconnaîtra un vecteur normal du plan cherché. On retrouve ainsi la formule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ que nous avions établie à la page 11.

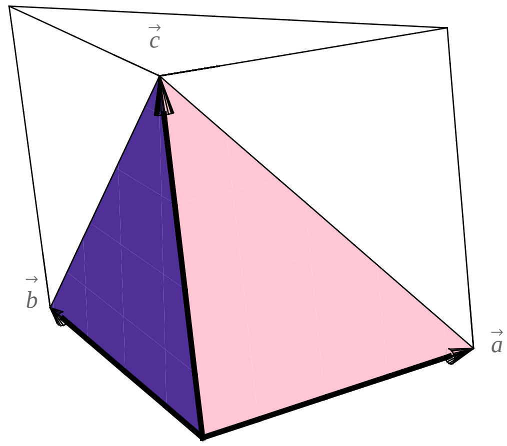
Volume du prisme à base triangulaire

Le volume du prisme à base triangulaire sous-tendu par les vecteurs $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$ est égal à $\frac{1}{2}$ du volume du parallélépipède sous-tendu par les vecteurs $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$. Donc



$$\mathrm{Vol}\left(\text{prisme}\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|$$

Volume du tétraèdre



Le volume du tétraèdre sous-tendu par les vecteurs $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ est égal à $\frac{1}{3}$ du volume du prisme à base triangulaire sous-tendu par les vecteurs $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$. Donc

$$\text{Vol}\left(\text{tétraèdre}\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right) = \frac{1}{6}\left|\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|$$

- Orientation

Pour déterminer l'orientation d'une base, on peut étudier le signe de son déterminant; par exemple,

$$\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2 \geq 0$$

Donc, si le produit vectoriel n'est pas nul, on est assuré que $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}\right)$ est une base directe.