Produit scalaire en dimension 3

- **Liens hypertextes**

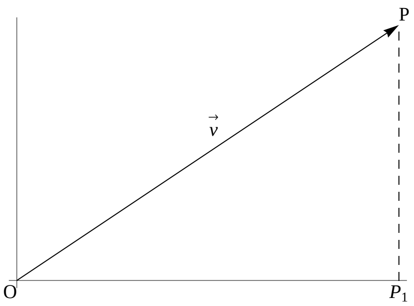
Produit vectoriel et déterminant:
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Geom3D/ProduitVectoriel-Determinant.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

Norme d'un vecteur en dim. 2 (révision)

Par rapport à une base orthonormée, considérons le vecteur

$$\overrightarrow{OP} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$



Le triangle $O\,P_1\,P$ étant rectangle en $P_1(v_1;\ 0)$, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\| \vec{v} \|^2 = \| \overrightarrow{OP} \|^2 = \| \overrightarrow{OP_1} \|^2 + \| \overrightarrow{P_1\,P} \|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\boxed{\| \vec{v} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Par exemple, calculons la norme de la différence de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$:

$$\| \vec{u} - \vec{v} \| = \left\| \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} = \sqrt{u_1^2 - 2\,u_1\,v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2\,u_2\,v_2 + v_2^2}$$

Cette expression ne doit pas être confondue avec la différence des normes

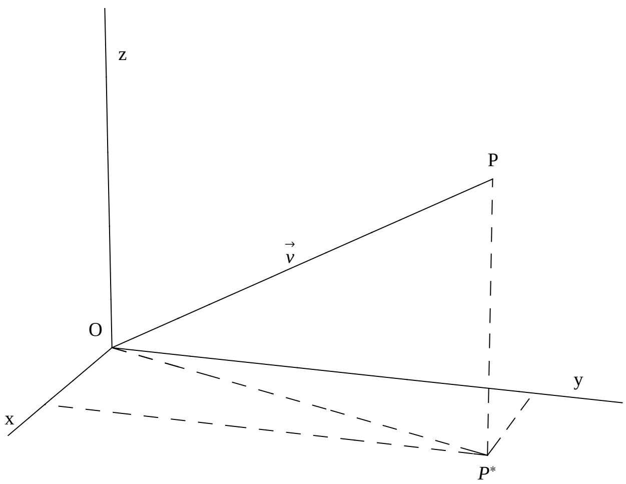
$$\| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} - \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Norme d'un vecteur en dim. 3

Par rapport à une base orthonormée, considérons le vecteur

$$\overrightarrow{OP} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Notons $P^*\,(v_1\,;\; v_2\,;\; 0)$ la projection orthogonale de P sur le plan horizontal Oxy.



Le triangle $O\,P^*\,P$ étant rectangle en P^*, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\| \vec{v} \|^2 = \| \overrightarrow{OP} \|^2 = \| \overrightarrow{O\,P^*} \|^2 + \| \overrightarrow{P^*\,P} \|^2 = \left(v_1^2 + v_2^2\right) + v_3^2$$

$$\boxed{\| \vec{v} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Par exemple, calculons la norme de la différence de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$$\| \vec{u} - \vec{v} \| = \left\| \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

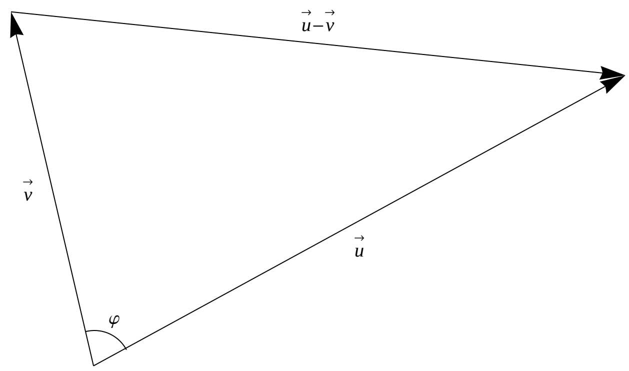
$$= \sqrt{u_1^2 - 2\,u_1\,v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2\,u_2\,v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2\,u_3\,v_3 + v_3^2}$$

Cette expression ne doit pas être confondue avec la différence des normes

$$\| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} - \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Version vectorielle du théorème du cosinus (révision)

Considérons deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et notons φ l'angle entre les deux vecteurs.



Appliqué à cette situation, le théorème du cosinus s'écrit

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\varphi)$$

Dans le cas particulier où l'angle φ est droit, le terme $-2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\varphi)$ est nul. Ce terme représente la correction à apporter au théorème de Pythagore pour le généraliser au triangle quelconque. En isolant ce terme (au facteur -2 près), on obtient la version vectorielle du théorème du cosinus :

$$\boxed{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}$$

Produit scalaire de deux vecteurs en dim. 2 (révision)

Par rapport à une base orthonormée, considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

On peut alors simplifier l'expression du théorème du cosinus:

$$\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 + 2\,u_1\,v_1 - v_1^2 - u_2^2 + 2\,u_2\,v_2 - v_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2\,u_1\,v_1 + 2\,u_2\,v_2) = u_1\,v_1 + u_2\,v_2$$

Cette grandeur est appelée "produit scalaire des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$" et est notée $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
On obtient donc deux façons d'exprimer le produit scalaire dans le plan :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\varphi) \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \end{array}}$$

Produit scalaire de deux vecteurs en dim. 3

Par rapport à une base orthonormée, considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs de l'espace sont nécessairement dans un même plan. On peut donc leur appliquer le théorème du cosinus :

$$\| \vec{u} \| \; \| \vec{v} \| \cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2 - (u_3 - v_3)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - u_1^2 + 2\,u_1\,v_1 - v_1^2 - u_2^2 + 2\,u_2\,v_2 - v_2^2 - u_3^2 + 2\,u_3\,v_3 - v_3^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2\,u_1\,v_1 + 2\,u_2\,v_2 + 2\,u_3\,v_3) = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

Cette grandeur est appelée "produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$" et est notée $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
On obtient donc deux façons d'exprimer le produit scalaire dans l'espace :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \; \| \vec{v} \| \cos(\varphi) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3 \end{array}}$$

Les proprétés suivantes du produit scalaire sont les mêmes en dimensions 2 et 3 :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \left(\lambda\,\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = \lambda\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{u}^{\,2} = \| \vec{u} \|^2 \end{array}}$$

Démontrons la première propriété en développant par rapport à une base orthonormée de l'espace.
D'une part,

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= (u_1 + v_1)\,w_1 + (u_2 + v_2)\,w_2 + (u_3 + v_3)\,w_3$$

$$= u_1\,w_1 + v_1\,w_1 + u_2\,w_2 + v_2\,w_2 + u_3\,w_3 + v_3\,w_3$$

D'autre part,

$$\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= (u_1\,w_1 + u_2\,w_2 + u_3\,w_3) + (v_1\,w_1 + v_2\,w_2 + v_3\,w_3)$$

On peut constater l'égalité des deux expressions.

Démontrons la deuxième propriété en développant par rapport à une base orthonormée de l'espace.

D'une part,

$$\left(\lambda \vec{u}\right)\cdot\vec{v} = \left(\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\\\lambda u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

$$= (\lambda u_1)\, v_1 + (\lambda u_2)\, v_2 + (\lambda u_3)\, v_3 = \lambda u_1 v_1 + \lambda u_2 v_2 + \lambda u_3 v_3$$

D'autre part,

$$\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \lambda\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \lambda\,(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) = \lambda u_1 v_1 + \lambda u_2 v_2 + \lambda u_3 v_3$$

On peut constater l'égalité des deux expressions.

Démontrons la troisième propriété en développant par rapport à une base orthonormée de l'espace.
D'une part,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

D'autre part,

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$$

On peut constater l'égalité des deux expressions.

Démontrons la quatrième propriété en développant par rapport à une base orthonormée de l'espace.
D'une part, le <u>carré scalaire</u> vaut

$$\vec{u}^{\,2} = \vec{u}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

D'autre part, le carré de la norme vaut

$$\|\vec{u}\|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

On peut constater l'égalité des deux expressions.