Dérivée I, exercices de base

Edition 2006-2007 / DELM

§ 1 Vitesse instantanée

▫ *Liens hypertextes*

Dérivée I - Activités préparatoires
    http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Preparation.pdf
Dérivée I - Activités préparatoires - Corrigés:
    http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Preparation-Corriges.pdf
Dérivée I - Cours
    http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Cours.pdf
Dérivée I - Exercices de niveau avancé:
    http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Derivees/1/Derivee_1-Exercices_avance.pdf
Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):
    http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

■ § 1.1, § 1.2 et § 1.3 Vitesse moyenne, vitesse instantanée

■ Exercice 1

On considère une voiture qui freine.
En choisissant l'instant $t = 0$ comme début du freinage, la seconde comme unité de temps et le mètre comme unité de longueur, son horaire est

$$x(t) = 20\,t - 2\,t^2, \qquad 0 \leq t \leq t_{max}$$

Pour simplifier, laissez tomber les unités dans les calculs mais réintroduisez les unités dans les réponses pour interpréter les résultats.

a) Calculez sa vitesse moyenne durant les intervalles de temps
[0; 5], [0; 1], [0; 0.2], [0; 0.04]

b) Calculez v(0) = vitesse initiale.

c) Calculez v(a) = vitesse à l'instant a.

d) Calculez la durée du freinage.
Calculez la distance de freinage.

e) Représentez graphiquement la fonction $t \mapsto x(t)$
et interprétez les résultats précédents sur le graphique.

§ 2 Dérivées

■ § 2.1, § 2.2 et § 2.3 Taux d'accroissement, nombre dérivé

■ Exercice 2

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{10}$$

a) Calculez le taux d'accroissement de f sur les intervalles
[5; 15], [5; 6], [5; 5.1], [5; 5.01], [5; 5.001],
[0; 5], [4; 5], [4.9; 5], [4.99; 5], [4.999; 5].

b) Calculez $f'(5)$ = dérivée de f en 5.

c) Calculez $f'(a)$ = dérivée de f en a.

d) Représentez graphiquement la fonction f et
interprétez les résultats précédents sur le graphique.

■ Exercice 3

On considère une cuve cylindrique de 100 litres qui se vide en 100 secondes. La cuve se vide par un trou situé sur le fond.
Le volume d'eau Q(t) qui reste dans la cuve obéit à la loi

$$Q(t) = 100\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$$

où t est exprimé en secondes et Q en litres.

t [s]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Q(t) [l]	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

a) Expliquez pourquoi la cuve se vide plus rapidement au début qu'à la fin.

b) Expliquez qu'on peut interpréter les expressions suivantes comme représentant
un débit moyen durant un intervalle de temps:

$$\frac{Q(80) - Q(20)}{80 - 20}, \quad \frac{Q(40) - Q(20)}{40 - 20}, \quad \frac{Q(21) - Q(20)}{21 - 20}, \quad \frac{Q(19) - Q(20)}{19 - 20}$$

c) Ecrivez l'expression du débit moyen durant l'intervalle de temps [20; t].
Calculez $d(20)$ = débit à l'instant 20.

d) Calculez le débit à l'instant a.

e) Faites un graphique de la fonction $t \mapsto Q(t)$ et
interprétez les résultats précédents dans le graphique.

■ Exercice 4

Calculez les limites suivantes

$$\lim_{x\to 3}(2x-5) \qquad \lim_{x\to -2}\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 8}\frac{5x-3}{x+5}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x+3} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x+1}$$

■ Exercice 5

Calculez les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}x \qquad \lim_{x\to 0}x^2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{x-5} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

■ Exercice 6

Calculez les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x^2+x-3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x+2}{x+1} \qquad \lim_{x\to -5}\frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$$

■ Exercice 7

Pour $a \neq 0$, calculez les limites suivantes

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x+a} \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^2+a^2}{x+a}$$

$$\lim_{x\to -a}\frac{x^2-a^2}{x+a} \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} \qquad \lim_{x\to -a}\frac{x^3+a^3}{x+a}$$

■ Exercice 8

On donne $f(x) = x^3 + 1$. Calculez les expressions

$$f(x) - f(a) \qquad f(x-a)$$

$$f(x) - a \qquad f(2x)$$

$$2f(x) \qquad 3f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - 5$$

$$f(x+h) - f(x) \qquad f(x) + h - f(x)$$

$$\frac{1}{f(x)} \qquad f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

■ Exercice 9

Calculez les dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = x^3 \qquad \text{en } x = 1$$
$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{en } x = \frac{1}{2}$$
$$h(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \qquad \text{en } x = 0$$

■ Exercice 10

Calculez les limites suivantes. Le cas échéant, dites s'il s'agit de la dérivée d'une fonction; précisez alors la fonction et l'abscisse. (Il y a plusieurs fonctions possibles; on en demande une).

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

■ Exercice 11

Notons $p(t)$ = nombre de millions de bactéries dans une culture à l'instant t (en heures).

a) A partir du tableau

t [h]	2	3	4	5	6
$p(t)$ [10^6 bactéries]	9.87	31.0	97.4	306.	961.

calculez

$$\frac{p(6) - p(3)}{3}, \quad \frac{p(5) - p(3)}{2}, \quad \frac{p(4) - p(3)}{1}, \quad \frac{p(2) - p(3)}{-1}$$

b) Que représente

$$\frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

c) Que représente

$$p'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

■ Exercice 12

Pour un mobile, on définit l'<u>accélération moyenne sur un intervalle de temps</u> comme étant égale au taux de variation de la vitesse

$$\bar{a}_{[t_1, t_2]} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'<u>accélération à l'instant t</u> est la limite de l'accélération moyenne sur l'intervalle $[t,\ t+\Delta t]$ pour Δt tendant vers 0:

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{a}_{[t, t+\Delta t]}$$

a) Démontrez que

$$a(t) = v'(t)$$

b) Calculez l'accélération instantanée des horaires suivants

$$x(t) = -5\,t^2 + 3\,t + 7$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

$$x(t) = \frac{t^3}{15}$$

■ § 2.4 Fonction dérivée

■ Interprétation de la dérivée

■ Exercice 13

On donne la fonction *f* par $f(x) = x^2$ ainsi que la sécante qui passe par *O(0; 0) et A(1; 1).*
Calculer la dérivée $f'(x)$ à partir de la définition et montrer qu'il existe une tangente à la parabole en un point situé entre O et A où la tangente est parallèle à la sécante donnée.

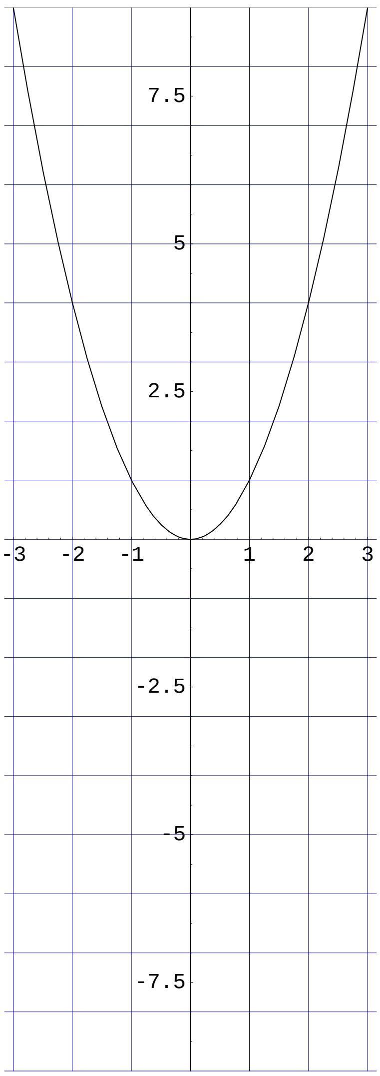
■ Exercice 14

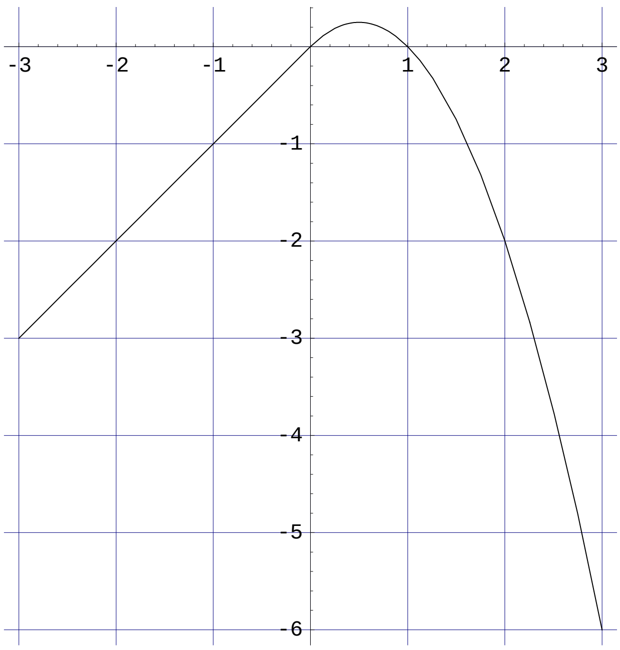
On admettra que l'aire située entre l'axe des x, la droite verticale d'abscisse x, (x > 0), et la parabole d'équation $y = x^2$ est donnée par la fonction $S(x) = \frac{1}{3}x^3$. Calculer $S'(x)$ à partir de la définition de la dérivée et donner une interprétation géométrique de $S'(x)$

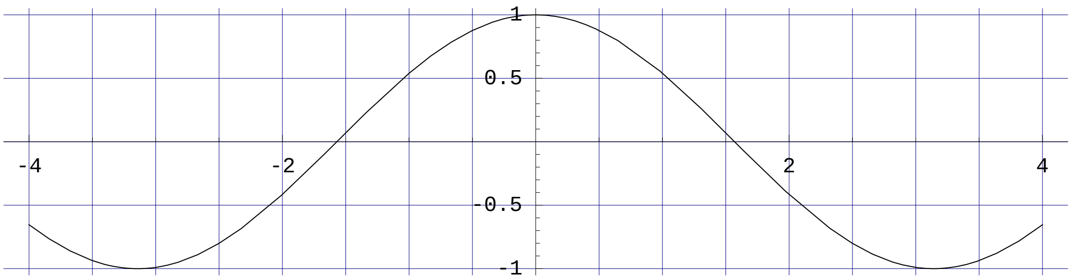
■ Dérivée graphique

■ Exercice 15

Dessinez la fonction dérivée des fonctions suivantes :


7.5
5
2.5
-3 -2 -1 1 2 3
-2.5
-5
-7.5

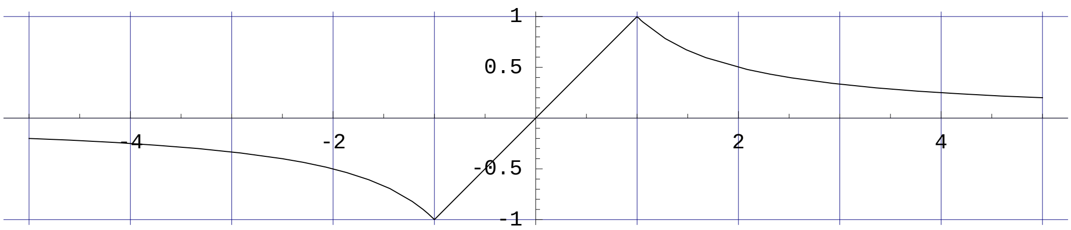

-3 -2 -1 1 2 3
-1
-2
-3
-4
-5
-6

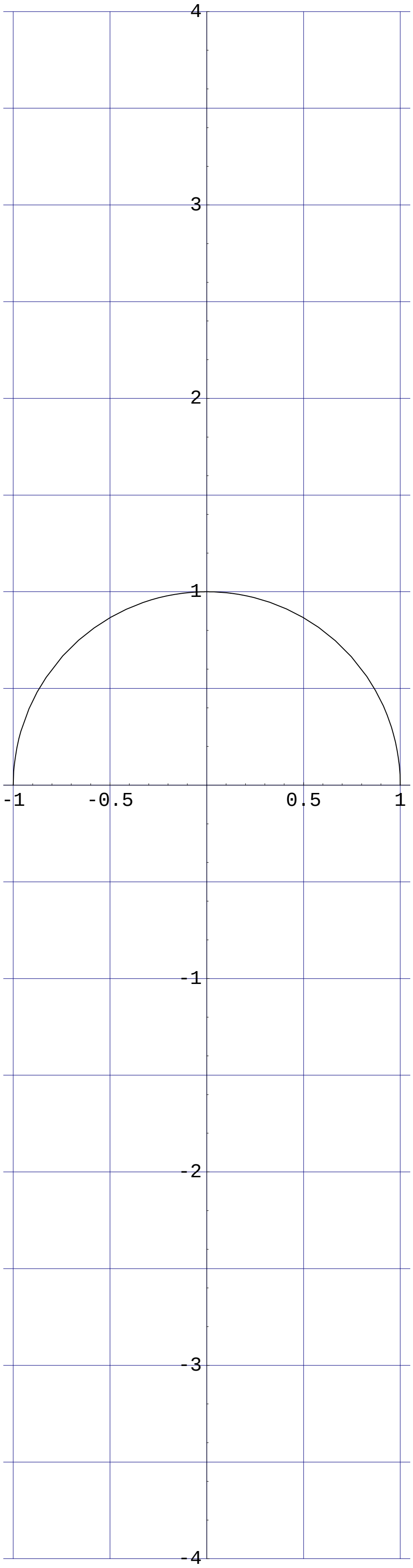


Le corrigé est joint.

■ Exercice 16

Même exercice





Le corrigé est joint.

■ Exercice 17

Le graphe ci-dessous est celui de la position d'un mobile suivant une trajectoire rectiligne.

a) Déterminer la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps [0 , 1]

b) Déterminer la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps [1 , 4]

c) Déterminer la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps [2 , 4]

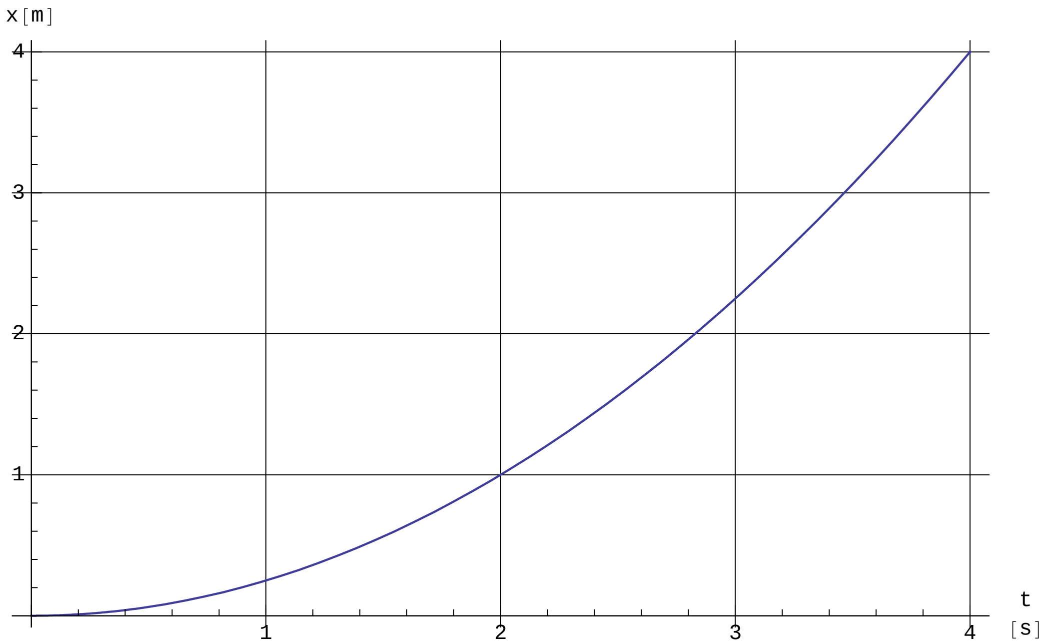
d) Déterminer la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps [3 , 4]

e) Déterminer la vitesse du mobile à l'instant $t = 1$ [*s*]

f) Déterminer la vitesse du mobile à l'instant $t = 0$ [*s*]

g) Déterminer la vitesse du mobile à l'instant $t = 4$ [*s*]

h) Tracer le graphe de la vitesse sur l'intervalle [0 , 4]



■ Exercice 18

La courbe donnée ci-dessous représente la température d'un liquide que l'on a placé dans un réfrigérateur dont la température est maintenue constante et égale à 5 °C.

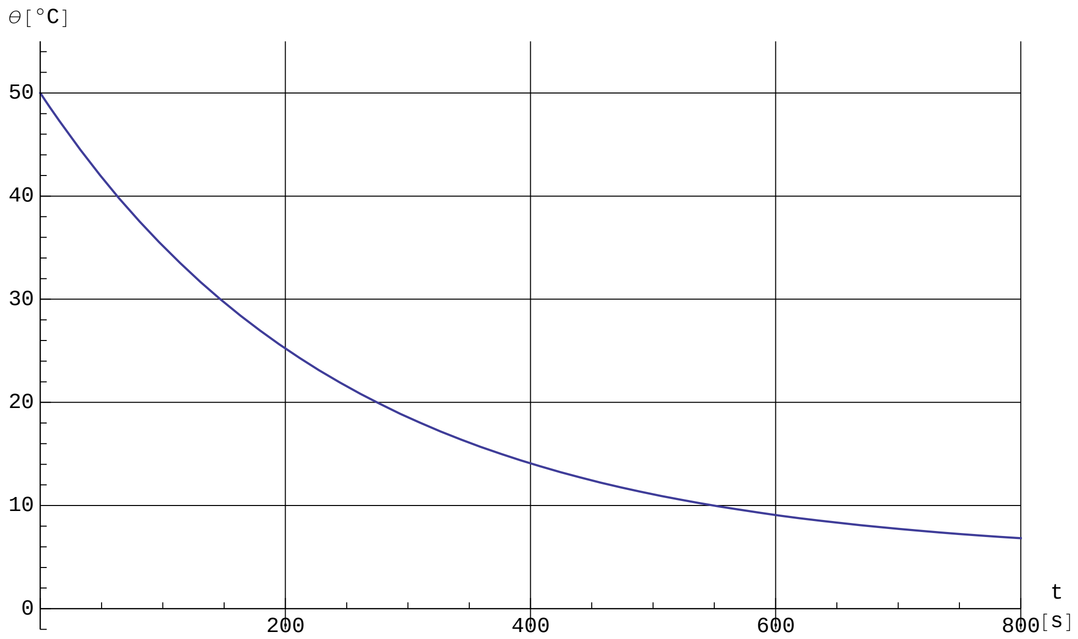
a) Quelle est la température initiale du liquide ?

b) Déterminer le taux de variation de la température entre les dates $t = 100\, s$ et $t = 500\, s$.
Interpréter le signe du résultat obtenu.

c) Déterminer le taux de variation de la température entre les dates $t = 0\, s$ et $t = 100\, s$.

d) Quel est le taux instantané de variation à l'instant $t = 100\, s$?

e) Estimez la température et son taux de variation moyen sur l'intervalle [0 , t] lorsque t tend vers l'infini ?



§ 2.5 Règles de calcul

Exercice 19

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes par de trois méthodes

1° graphiquement;

2° par un calcul de limites en partant de la définition de la dérivée;

3° au moyen des règles de calcul (sans calcul de limites explicite)

$$f_1(x) = x + 2$$
$$f_2(x) = 3x + 2 + 3\pi$$
$$f_3(x) = a x + b$$
$$f_4(x) = \frac{\pi}{2} x - \frac{3}{4}$$

Exercice 20

Calculez les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = x^2$$
$$f_3(x) = x^3$$
$$f_4(x) = x^4$$
$$f_0(x) = 1$$
$$f_{-1}(x) = \frac{1}{x}$$
$$f_{-2}(x) = \frac{1}{x^2}$$

Supputez une formule générale pour la dérivée de

$$f_p(x) = x^p \qquad \text{pour } p \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 21

Calculez les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f_0(x) = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)x+5}{\sqrt{2}}$$

$$f_1(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}$$

$$f_3(x) = 7x^3 - 3x^2 - 2x + 3 - x^{-1} + x^{-2}$$

$$f_4(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{7x^3}$$

■ Exercice 22

Calculez les fonctions dérivées des fonctions suivantes :
On ne développera pas les produits avant de dériver et on réduira les termes semblables des résultats.

$$f_1(x) = (x+2)(x-3)$$
$$f_2(x) = (3x-6)(7x+4)$$
$$f_3(x) = \left(x^3+2x\right)\left(x^2-x+3\right)$$
$$f_4(x) = \left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(-2x^3+3+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$f_5(x) = \left(2x^{-2}+\frac{1}{x}\right)\left(-2x^{-3}+3x+\frac{1}{x^2}\right)$$

■ Exercice 23

a) Après avoir développé le carré, calculez

$$\left((5x+1)^2\right)' = \left(25x^2+10x+1\right)' = \ldots$$

b) En considérant qu'il s'agit du produit de deux facteurs, calculez

$$\left((5x+1)^2\right)' = \left((5x+1)(5x+1)\right)' = \ldots$$

c) Le raisonnement suivant est-il correct

$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \left((5x+1)^2\right)' = 2(5x+1) \qquad ?$$

d) A partir de la règle de la multiplication, établissez la formule générale de la dérivée du carré d'une fonction

$$\left(f^2(x)\right)' = \left(f(x)\cdot f(x)\right)' = \ldots$$

e) Au moyen de la règle précédente, calculez

$$\left((5x+1)^2\right)' = \ldots$$

f) Généralisez

$$\left(f^3(x)\right)' = \ldots$$

$(f^p(x))' = \ldots$ pour $p \in \mathbb{N}$

§ 2.6 Dérivée à droite, dérivée à gauche, point anguleux

Exercice 24

On donne la fonction

$$f(x) = |p(x)|$$

où p est un polynôme en x quelconque. Démontrer, par un raisonnement géométrique qu'en un point anguleux quelconque de la courbe de f, les dérivées à gauche et à droite sont opposées.
Application :
a) Trouver les points anguleux de la courbe de la fonction

$$f(x) = |x^2 - x - 2|$$

b) Calculer les angles entre les demi-tangentes en ces points anguleux.

§ 3 Applications de la dérivée

§ 3.1 Equation de la tangente

Exercice 25

On donne la fonction

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

a) Calculer la pente de la tangente au point A d'abscisse 1 situé sur la courbe de f.
b) Calculer les coordonnées du point de la courbe de f où la pente de la tangente vaut 2.
c) Calculer le plus simplement possible les équations des tangentes à la courbe de f qui passent par le point C(1; 0)

Exercice 26

On donne la fonction

$$f(x) = x^2$$

Déterminez l'intersection de la tangente à *f* en *a* avec l'axe de symétrie du graphe de *f*.
En déduire une construction de la tangente à une parabole quelconque par un point de celle-ci.

Exercice 27

On donne la fonction

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

a) Calculer la pente de la tangente au point A d'abscisse 1 situé sur la courbe de f.
b) Calculer les coordonnées du point de la courbe de f où la pente de la tangente vaut 2.
c) Calculer le plus simplement possible les équations des tangentes à la courbe de f qui passent par le point A(1; 0)

Exercice 28

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Déterminez l'intersection de la tangente à *f* en *a* avec l'asymptote horizontale de *f*.
En déduire une construction de la tangente à l'hyperbole par un point de celle-ci.

§ 3.2 Angles entre deux courbes

Exercice 29

Caculez les angles entre les deux courbes suivantes

$$f(x) = 1 - x^2$$
$$g(x) = x^2 + 3x - 4$$

Représentez graphiquement la situation.

Exercice 30

On donne la fonction

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

a) Caculez les angles que forme la courbe donnée avec l'axe des abscisses.

b) Caculez les angles que forme la courbe donnée avec l'axe des ordonnées.

§ 3.3 Courbes tangentes

Exercice 31

On donne les fonctions

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 2$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$$

Montrez que les deux fonctions sont tangentes.
Déterminez leur tangente commune.
Représentez graphiquement la situation.

Exercices facultatifs de renforcement

Exercice 32

Calculez les limites suivantes

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

Exercice 33

On donne $f(x) = \frac{1}{2x-3}$. Calculez les expressions

$f(x) - f(a)$ $f(x-a)$

$f(x) - a$ $f(2x)$

$2f(x)$ $3f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - 5$

$f(x+h) - f(x)$ $f(x) + h - f(x)$

$\frac{1}{f(x)}$ $f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Exercice 34

Un récipient cylindrique est rempli par une source S. La hauteur h de l'eau dans le cylindre est donée par la fonction représentée ci-dessous.

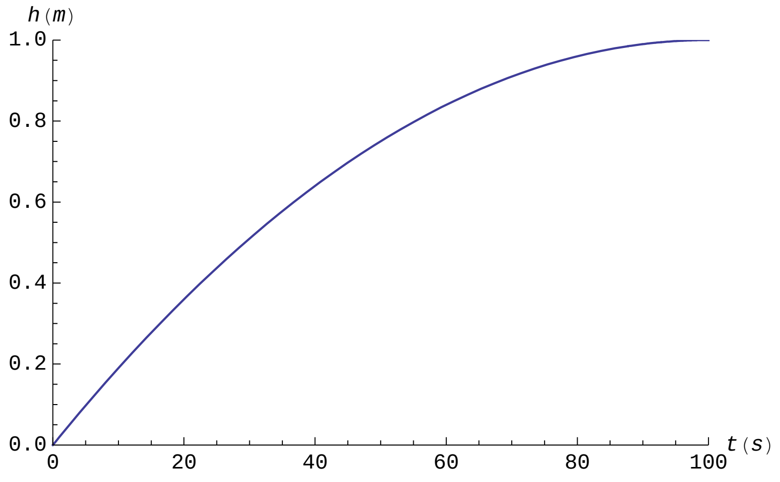
a) Déterminer graphiquement le rapport $\frac{h(20)-h(10)}{20\,s-10\,s}$. Que représente ce rapport ?

b) Que représente la quantité V(t) = πr^2 × h(t), si r est le rayon de base du cylindre ?

c) Calculer le rapport $\frac{V(20)-V(10)}{20\,s-10\,s}$ en posant $r = 0.5\,m$. Que représente ce rapport ?

d) Déterminer le débit instantané à l'instant $t = 60\,s$.

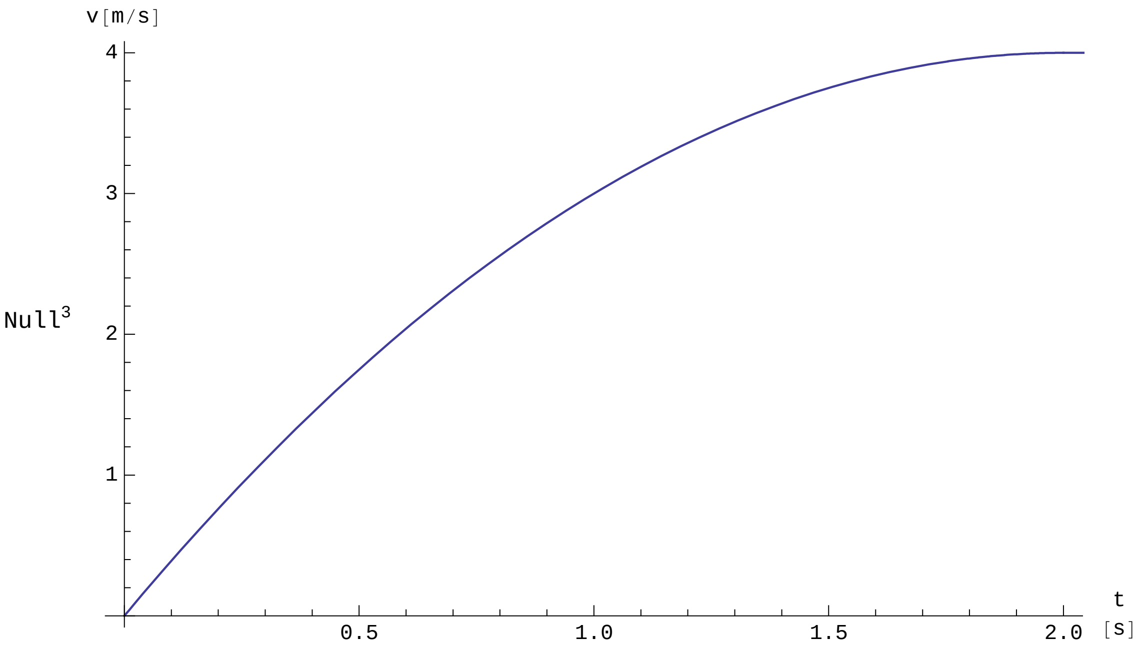
e) Que vaut ce débit lorsque t tend vers $100\,s$?



■ Exercice 35

Le graphe ci-dessous est celui de la vitesse d'un mobile se déplaçant sur une trajectoire rectiligne.

a) Quelle est l'accélération moyenne sur l'intervalle [0 s ; 2 s] ?
b) Que vaut l'accélération moyennesur l'intervalle [0 s ; 10s] ?
c) Que vaut l'accélération moyennesur l'intervalle [5 s ; 10s] ?
d) Que vaut l'accélération moyenne sur l'intervalle [0 s ; t] lorsque t tend vers l'infini ?
e) Quelle est l'accélération au temps $t = 0\,s$?
f) A quel instant l'accélération vaut-elle $1\, m / s^2$?



■ Exercice 36

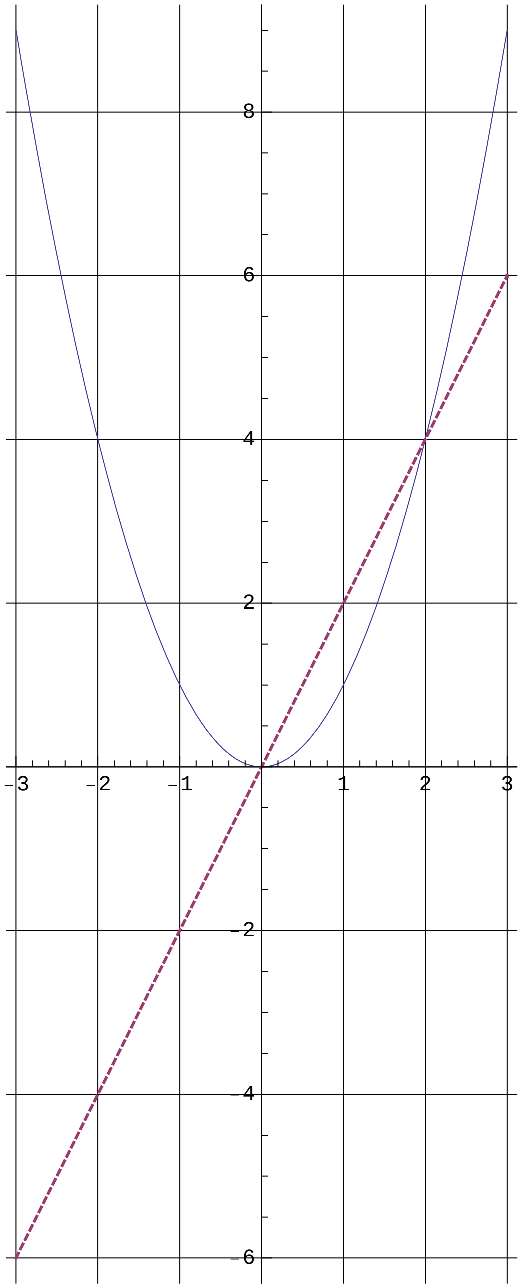
Caculez les angles entre les deux courbes suivantes

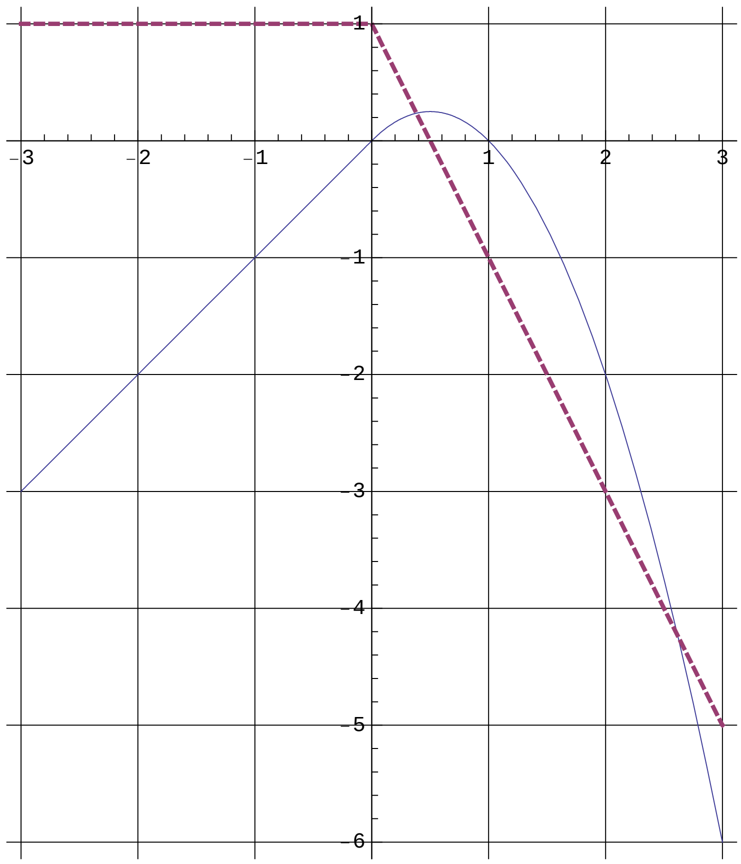
$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$
$$g(x) = x^2 + x - 6$$

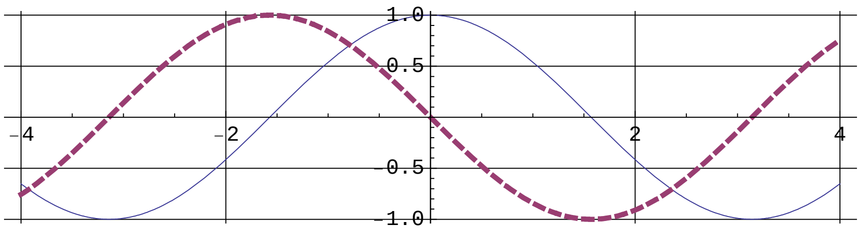
Représentez graphiquement la situation.

Réponses de certains exercices

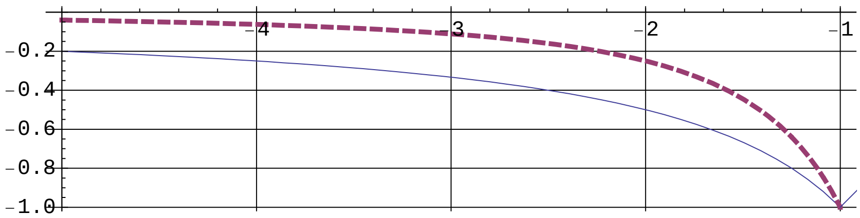
- Corrigé de l'exercice 15

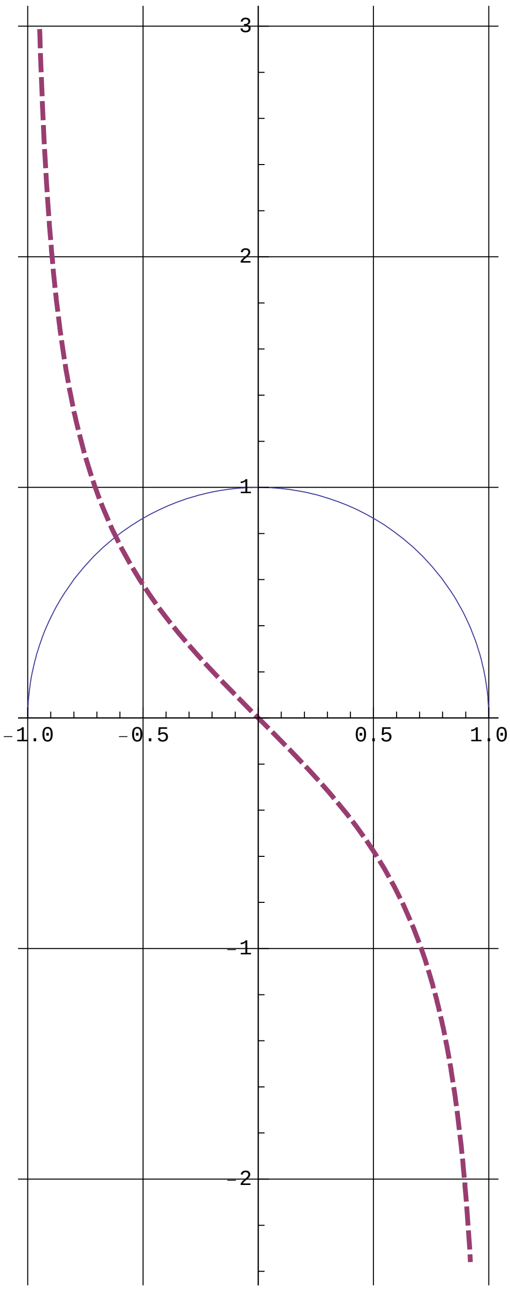



1
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3
−4
−5
−6


1.0
0.5
−4
−2
2
4
−0.5
−1.0

- Corrigé de l'exercice 16





- Corrigé de l'exercice 32

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 2\,x - 15}{x^2 + 8\,x + 15} = \frac{3^2 + 2\times 3 - 15}{3^2 + 8\times 3 + 15} = \frac{0}{48} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-1) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+x+1}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)} - \frac{3}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(-1)(x+2)}{\left(x^2+x+1\right)} = \frac{-3}{3} = -1$$

- Corrigé de l'exercice 33

$$f(x) = \frac{1}{2x-3}$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2a-3}$$

$$f(x-a) = \frac{1}{2(x-a)-3} = \frac{1}{2x-2a-3}$$

$$f(x) - a = \frac{1}{2x-3} - a$$

$$f(2x) = \frac{1}{2(2x)-3} = \frac{1}{4x-3}$$

$$2f(x) = 2\frac{1}{2x-3} = \frac{2}{2x-3}$$

$$3f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - 5 = 3\frac{1}{2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)-3} - 5 = \frac{3}{\sqrt{2}\,\pi - 3} - 5$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2(x+h)-3} - \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{2x+2h-3} - \frac{1}{2x-3}$$

$$f(x) + h - f(x) = h$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2x-3}\right)} = 2x-3$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2\frac{1}{x}-3} = \frac{x}{2-3x}$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2a-3}}{x-a} =$$

$$\frac{(2a-3)-(2x-3)}{(2x-3)(2a-3)(x-a)} = \frac{2(a-x)}{(2x-3)(2a-3)(x-a)} = \frac{-2}{(2x-3)(2a-3)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2(x+h)-3} - \frac{1}{2x-3}}{h} =$$

$$\frac{(2x-3)-(2x+2h-3)}{h(2x+2h-3)(2x-3)} = \frac{-2h}{h(2x+2h-3)(2x-3)} = \frac{-2}{(2x+2h-3)(2x-3)}$$