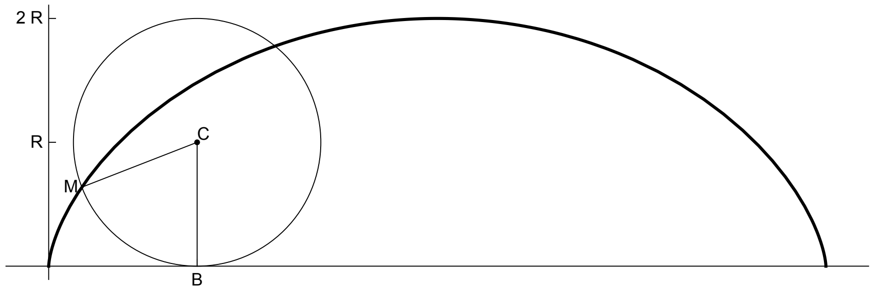
La cycloïde

Marcel Délèze

Application du calcul intégral

Forme paramétrique d'un arc de cycloïde

Intuitivement, une cycloïde est la trajectoire parcourue par la valve M d'une roue d'un véhicule lorsque la roue avance sans glisser.



La longueur OB est égale à la longueur d'arc BM qui s'exprime à partir de l'angle au centre $t = \mathrm{B\hat{C}M}$ exprimé en radians

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} Rt \\ 0 \end{pmatrix}$$

La longueur BC est égale au rayon R du cercle

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = R \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

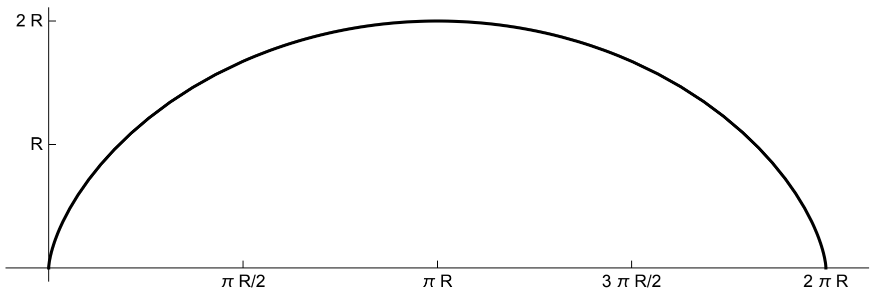
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{OC} + \mathrm{CM} = \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

Horaire du point M

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

Forme paramétrique d'un arc de cycloïde

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin(t)) \\ y(t) = R(1 - \cos(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



Aire d'un arc de cycloïde

$$A = \int_0^{2\pi R} g(x)dx$$

où la fonction $y = g(x)$ n'est pas connue explicitement, mais est définie par le système paramétrique. Effectuons le changement de variable

$$\begin{aligned} g(x) &= y(t) \\ \mathrm{d}x &= x'(t)\mathrm{d}t \\ x = 0 &\longleftrightarrow t = 0 \\ x = 2\pi R &\longleftrightarrow t = 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi R} g(x)dx = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} R(1-\cos(t))R(1-\cos(t))\mathrm{d}t \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2\,\mathrm{d}t \\ &= R^2 \left(\int_0^{2\pi} 1\,dt - 2\int_0^{2\pi} \cos(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t \right) \\ &= R^2 \left(2\pi - 0 + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \right) \\ &= R^2 \left(2\pi - 0 + \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2t)\mathrm{d}t \right) \\ &= R^2(2\pi - 0 + \pi + 0) = \boldsymbol{3\pi R^2} \end{aligned}$$

Longueur d'un arc de cycloïde

Selon l'interprétation cinématique, la longueur d'arc est la somme de petits déplacements que l'on calcule en multipliant la vitesse instantanée par l'intervalle de temps Δt. Plus précisément,

$$s = \int_0^{2\pi} \left\| \vec{v}(t) \right\| \,\mathrm{d}t$$

Vitesse

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix}$$

Norme de la vitesse

$$\begin{aligned}\left\|\vec{v}(t)\right\| &= \sqrt{R^2(1-\cos(t))^2 + R^2\sin^2(t)}\\ &= R\sqrt{1-2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)}\\ &= R\sqrt{2(1-\cos(t))}\\ &= R\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2R\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

Pour $0 <= t <= 2\,\pi$, on a $0 <= \frac{t}{2} <= \pi$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$ donc $\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$. Ainsi,

$$\left\|\vec{v}(t)\right\| = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Longueur d'arc

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi} \left\|\vec{v}(t)\right\|\,\mathrm{d}t\\ &= 2R\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2R\left(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi}\\ &= 2R((-2)(-1)-(-2)1) = \boldsymbol{8R}\end{aligned}$$

Lien vers la page mère:

Calcul intégral

www.deleze.name/marcel/sec2/cours/CalculIntegral/index.html