Techniques d'intégration

Marcel Délèze

Liens hypertextes dans www.deleze.name

Calcul numérique du nombre π avec des sommes de Darboux
Exemples d'intégration par changement de variable
Décomposition en fractions simples (intégration des fractions rationnelles)
Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère)
www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

1 Intégration par parties

1.1 Intégration par parties, intégrale indéfinie

L'intégration par parties découle de la règle de la dérivée du produit de deux fonctions. Soit F une primitive de f .

$$[F(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = [F(x) \cdot g(x)]' - F(x) \cdot g'(x)$$

$$\boxed{\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{(voir \textit{Formulaires})}$$

Exemple type

$$\int x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Par parties:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(x), & F(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x, & g'(x) = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -x \cdot \cos(x) - \int -\cos(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x) + c \end{aligned}$$

1.2 Intégration par parties, intégrale définie

Passons de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie.

$$\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{(voir \textit{Formulaires})}$$

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)\cdot g(b) - F(a)\cdot g(a) - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple type

$$\int_a^b x\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Par parties:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\sin(x), & F(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x, & g'(x)=1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -x\cdot\cos(x)\Big|_a^b - \int_a^b -\cos(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= -b\cos(b) + a\cdot\cos(a) + \int_a^b \cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -b\cos(b) + a\cdot\cos(a) + \sin(x)\Big|_a^b \\
&= -b\cos(b) + a\cdot\cos(a) + \sin(b) - \sin(a)
\end{aligned}$$

2 Intégration par substitution

2.1 Intégration par substitution, intégrale indéfinie

L'intégration par substitution découle de la règle de la dérivée de la composée de deux fonctions.

Soit G une primitive de g.

$$[G(f(x))]' = g(f(x))f'(x)$$

$$\int g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = G(f(x)) + c \text{ (voir \textit{Formulaire})}$$

$$\int g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int g(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{t=f(x)}$$

En lieu et place de la formule précédente, on peut retenir la liste des substitutions à effectuer (à retenir!) :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=t \\ f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ t=f(x) \end{array}}$$

Exemple type

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Par substitution :

$$
\begin{aligned}
&\sin(x) = t\\
&\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\
&t = \sin(x)
\end{aligned}
$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c$$

2.2 Intégration par substitution, intégrale définie

L'intégration par substitution découle de la règle de la dérivée de la composée de deux fonctions.

Soit G une primitive de g.

$$[G(f(x))]' = g(f(x))f'(x)$$

$$\int g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = G(f(x)) + c \text{ (voir \textit{Formulaire})}$$

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = G(f(b)) - G(f(a))$$

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

En lieu et place de la formule précédente, on peut retenir la liste des substitutions à effectuer (à retenir!) :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&f(x) = t\\
&f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\
&x = a \ \leftrightarrow\ t = f(a)\\
&x = b \ \leftrightarrow\ t = f(b)
\end{aligned}
}
$$

Exemple type

$$\int_a^b \sin(\omega x + \varphi)\,\mathrm{d}x$$

Par substitution :

$$
\begin{aligned}
&\omega x + \varphi = t\\
&\omega \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \ \leftrightarrow\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{\omega}\mathrm{d}t\\
&x = a \ \leftrightarrow\ t = \omega a + \varphi\\
&x = b \ \leftrightarrow\ t = \omega b + \varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sin(\omega x + \varphi)\,\mathrm{d}x &= \int_{\omega a+\varphi}^{\omega b+\varphi} \sin(t)\frac{1}{\omega}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\cos(t)\Big|_{\omega a+\varphi}^{\omega b+\varphi}\\
&= \frac{1}{\omega}(-\cos(\omega b + \varphi) + \cos(\omega a + \varphi))
\end{aligned}
$$

3 Intégration par changement de variable

3.1 Intégration par changement de variable, intégrale indéfinie

Dans l'intégration par changement de variable, on effectue une intégration par substitution "à l'envers", puis on revient à la variable originelle au moyen de la fonction réciproque.

$$\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas où la fonction f est bijective, en notant ${}^{r}f(x)$ la fonction réciproque de f,

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\Big|_{t={}^{r}f(x)}$$

Le changement de variable est décrit par la liste des remplacements à effectuer (à retenir !):

$$\boxed{\begin{array}{l} x = f(t) \\ \mathrm{d}x = f'(t)\,\mathrm{d}t \\ t = {}^{r}f(x) \end{array}}$$

Exemple type

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,\mathrm{d}x$$

Rappelons-nous d'abord que $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c$. Dans le but de mettre k^2 en évidence au dénominateur, effectuons le changement de variable

$$\begin{array}{l} x = kt \\ \mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t \\ t = \frac{x}{k} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+k^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(kt)^2+k^2}k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k}\arctan(t) + c\Big|_{t=\frac{x}{k}} = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right) + c \end{aligned}$$

3.2 Intégration par changement de variable, intégrale définie

Dans l'intégration par changement de variable, on effectue une intégration par substitution "à l'envers", puis on revient à la variable originelle au moyen de la fonction réciproque.

$$\int_{f(c)}^{f(d)} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas où la fonction f est bijective, en posant $a = f(c)$, $b = f(d)$ et en utilisant la fonction réciproque $c = {}^{r}f(a)$, $d = {}^{r}f(b)$,

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{{}^{r}f(a)}^{{}^{r}f(b)} g(f(t))f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable est décrit par la liste des remplacements à effectuer (à retenir!):

$$\boxed{\begin{array}{l} x = f(t) \\ \mathrm{d}x = f'(t)\,\mathrm{d}t \\ x = a \;\leftrightarrow\; t = {}^{r}f(a) \\ x = b \leftrightarrow\; t = {}^{r}f(b) \end{array}}$$

Exemple type

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable

$$\begin{array}{l} x = \cos(t) \\ \mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ x = a \;\leftrightarrow\; t = \arccos(a) \\ x = b \;\leftrightarrow\; t = \arccos(b) \end{array}$$

Pour la bijectivité, nous supposons $-1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq \pi$;

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}(-\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\int_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} \frac{\sin(t)}{|\sin(t)|}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} 1\,\mathrm{d}t = -t\Big|_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} = -\arccos(b) + \arccos(a) \end{aligned}$$