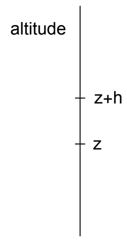
Pression atmosphérique en fonction de l'altitude

Marcel Délèze

1. Formule barométrique (atmosphère isotherme)

1.1 Poser l'équation différentielle



Notons $\bar{\rho}$ la masse volumique moyenne de l'air entre les altitudes z et z+h. D'après la loi de la croissance de la pression, la pression à l'altitude z est

$$p(z) = p(z+h) + \bar{\rho} g h$$

d'où

$$\frac{p(z+h) - p(z)}{h} = -\bar{\rho} g$$

Passons à la limite h→0

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} = -\rho(z) g$$

où ρ(z) désignme la densité de l'atmosphère à l'altitude z. Calculons ρ en supposant qu'il s'agit dun gaz parfait et que l'atmosphère est isotherme

$$pV = nRT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = p \frac{m}{n} \frac{1}{RT} = p \frac{M}{RT}$$

où

$$M = \frac{m}{n}$$

désigne la masse molaire de l'air. L'équation différentielle avec condition initiale de la fonction

$$z \longmapsto p(z)$$

s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -p \frac{M g}{RT}, \quad p(0) = p_0$$

où

$$\frac{Mg}{RT} = \text{constante, et } p_0 \text{ est donné}$$

1.2 Résoudre l'équation différentielle

L'équation différentielle est de la forme

$$p' = ap$$

où

$$a = -\frac{Mg}{RT}$$

est constant. Il s'agit donc d'une équation différentielle du premier ordre linéaire homogène à coefficient constant.

On utilise la méthode de la séparation des variables. Sous l'hypothèse $p > 0$,

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} = -\frac{Mg}{RT}p$$

$$\int \frac{1}{p}\,dp = -\frac{Mg}{RT}\int dz$$

$$\ln(p) = -\frac{Mg}{RT}z + k$$

où la constante d'intégration k est déterminée à partir de la condition initiale (pour $z = 0$, on a $p = p_0$)

$$\ln(p_0) = k$$

En substituant la valeur de k, on obtient

$$\ln(p) = \ln(p_0) - \frac{Mg}{RT}z$$

$$p = \exp\left(\ln(p_0) - \frac{Mg}{RT}z\right) \quad = p_0\, e^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

$$p(z) = p_0\, e^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

L'hypothèse $T =$ constante (15°C) étant peu réaliste, la formule barométrique ne peut être utilisée que pour de petites valeurs de z.

Pour mieux tenir compte des conditons actuelles et locales, dans le cas où on connaît la pression actuelle p_1 en un lieu proche d'altitude z_1, on utilise de préférence la formule

$$p(z) = p_1\, e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_1)}$$

Valeurs numériques des constantes et unités

$p =$ pression en pascals
$z =$ altitude en mètres
$p_0 = 101325$ Pa
$M = 28.966\ 10^{-3}$ kg mol^{-1}
$g = 9.805$ m s^{-2}
$R = 8.314510$ J mol^{-1}K^{-1} où J = kg m^{2}s^{-2}
$T = (15 + 273.15)$ K
$-\frac{Mg}{RT} = -\frac{0.000118544}{\mathrm{m}}$

$$p(z) = 101325 \text{ Pa } e^{-\frac{0.00012}{\mathrm{m}} z}$$

1.3 Pression atmosphérique [en Pa] en fonction de l'altitude [en m]

	0	200	400	600	800
0	101 325	98 922	96 576	94 286	92 050
1 000	89 867	87 736	85 655	83 624	81 641

2. Modèle d'atmosphère standard avec gradient de température constant
Formule du nivellement barométrique

2.1 Hypothèse du gradient de température constant

La température diminue avec l'altitude. Malheureusement, le gradient de température varie selon les conditions climatiques et météorologiques. Dans ce modèle, on considère que la température T décroît linéairement avec l'altitude z

$$T(z) = T_0 - az$$

et on choisit un gradient de température typique, par exemple

$$a = 6.5\ 10^{-3}\ \mathrm{K\ m^{-1}}$$

On décrit ainsi un état moyen de l'atmosphère, sans tenir compte de son état réel.

2.2 Intégration de l'équation différentielle

En substituant T dans l'équation différentielle avec condition initiale

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} = -p\frac{Mg}{RT}$$

$$p(0) = p_0$$

on obtient

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} = -p\frac{Mg}{R\left(T_0 - az\right)}$$

En séparant les variables

$$\int \frac{1}{p}\,dp = -\frac{Mg}{R}\int \frac{1}{T_0 - az}dz$$

Sous l'hypothèse $p > 0$,

$$\ln(p) = -\frac{Mg}{R}\left(-\frac{1}{a}\ln\left(T_0 - az\right)\right) + k = \frac{Mg}{Ra}\ln\left(T_0 - az\right) + k$$

où la constante d'intégration k est déterminée par la condition initiale (pour $z = 0$, on a $p = p_0$)

$$\ln\left(p_0\right) = \frac{Mg}{Ra}\ln\left(T_0\right) + k$$

$$k = \ln\left(p_0\right) - \frac{Mg}{Ra}\ln\left(T_0\right)$$

En substituant la valeur de k

$$\begin{aligned}
\ln(p) =& \frac{Mg}{Ra} \ln\left(T_0 - az\right) + \ln\left(p_0\right) - \frac{Mg}{Ra} \ln\left(T_0\right) \\
=& \ln\left(p_0\right) + \frac{Mg}{Ra}\left(\ln\left(T_0 - az\right) - \ln\left(T_0\right)\right) \\
=& \ln\left(p_0\right) + \frac{Mg}{Ra} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right) \\
=& \ln\left(p_0\right) + \ln\left(\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Ra}}\right)
\end{aligned}$$

$$p(z) = p_0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Ra}}$$

$$\boldsymbol{p(z) = p_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^{\frac{Mg}{Ra}}}$$

Cette dernière formule, appelée **Formule du nivellement barométrique**, peut être utilisée, avec prudence, jusque vers environ 12 000 m d'altitude.

2.3 Valeurs numériques des constantes et unités

p = pression en pascals
z = altitude en mètres
$p_0 = 101325$ Pa
$a = 6.5\ 10^{-3}$ K/m
$T_0 = (15 + 273.15)$ K
$\frac{a}{T_0} = \frac{0.0000225577}{\mathrm{m}}$
$M = 28.966\ 10^{-3}$ kg mol^{-1}
$g = 9.805$ m s^{-2}
$R = 8.314510$ J mol^{-1}K^{-1} où J = kg m^{2}s^{-2}
$\frac{Mg}{Ra} = 5.25516$

Numériquement,

$$p(z) = 101325 \left(1 - 2.25577\ 10^{-5} z\right)^{5.255}$$

2.4 Table numérique de la pression atmosphérique moyenne en hPa, en fonction de l'altitude de -500 m à 11400 m

Exemple de lecture de la table : Quelle est la pression atmosphérique moyenne à l'altitude de 1800 m ? La décomposition 1800 = 1500 + 300 nous amène à l'intersection de la ligne 1500 m et de la colonne 300 m où on lit la pression de 814.92 hPa.

	0	100	200	300	400
-500	1074.76	1062.23	1049.81	1037.50	1025.32
0	1013.25	1001.30	989.46	977.73	966.12
500	954.62	943.23	931.95	920.78	909.72
1000	898.76	887.92	877.18	866.54	856.01
1500	845.59	835.26	825.04	814.92	804.90
2000	794.98	785.16	775.44	765.82	756.29
2500	746.86	737.53	728.29	719.14	710.09
3000	701.13	692.26	683.48	674.79	666.20
3500	657.69	649.27	640.93	632.69	624.53
4000	616.45	608.46	600.56	592.73	585.00
4500	577.34	569.76	562.27	554.85	547.51
5000	540.26	533.08	525.97	518.95	512.00
5500	505.13	498.33	491.60	484.95	478.38
6000	471.87	465.44	459.07	452.78	446.56
6500	440.41	434.33	428.31	422.36	416.48
7000	410.67	404.92	399.24	393.62	388.07
7500	382.58	377.15	371.78	366.48	361.24
8000	356.06	350.94	345.88	340.88	335.94
8500	331.05	326.23	321.46	316.74	312.09
9000	307.49	302.94	298.45	294.01	289.63
9500	285.30	281.02	276.79	272.62	268.49
10000	264.42	260.40	256.43	252.50	248.63
10500	244.80	241.02	237.29	233.61	229.97
11000	226.38	222.83	219.33	215.87	212.46

2.5 Adaptation aux conditions actuelles et locales

Pour tenir compte des conditions actuelles et locales, dans le cas où on connaît la pression actuelle p_1 en un lieu proche d'altitude z_1 où règne une température T_1, le calcul avec les conditions initiales $T(z_1) = T_1$ et $p(z_1) = p_1$ donne les formules

$$\boldsymbol{T(z) = T_1 - a(z - z_1)}$$

$$\boldsymbol{p(z) = p_1 \left(1 - \frac{a}{T_1}(z - z_1)\right)^{\frac{Mg}{Ra}}}$$

Numériquement,

$$p(z) = p_1 \left(1 - \frac{6.5\ 10^{-3}\ \mathrm{K/m}}{T_1}(z - z_1)\right)^{5.25516}$$

Lien vers le calculateur en ligne :

Calculateur de la pression et de la masse volumique en fonction de l'altitude
www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/pression-altitude/calculateurs/masse-volumique.html

2.6 Altitude en fonction de la pression atmosphérique

Dans l'égalité

$$p = p_1 \left(1 - \frac{a}{T_1}(z - z_1)\right)^{\frac{Mg}{Ra}}$$

exprimons la correction d'altitude $(z - z_1)$ en fonction de la pression atmosphérique p :

$$\frac{p}{p_1} = \left(1 - \frac{a}{T_1}(z - z_1)\right)^{\frac{Mg}{Ra}}$$

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{Ra}{Mg}} = 1 - \frac{a}{T_1}(z - z_1)$$

$$\frac{a}{T_1}(z - z_1) = 1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{Ra}{Mg}}$$

On obtient la correction d'altitude en fonction de la pression atmosphérique :

$$z - z_1 = \frac{T_1}{a}\left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{Ra}{Mg}}\right)$$

L'argument de la fonction est p, la valeur est z. Les autres symboles représentent des constantes. Numériquement,

$$z - z_1 = \frac{T_1}{6.5\ 10^{-3}\ \mathrm{K/m}}\left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{0.190289}\right)$$

Liens hypertextes

- Formule du nivellement barométrique (sur Wikipedia)
  fr.wikipedia.org/wiki/Formule_du_nivellement_barom%C3%A9trique
- Tables numériques de l'atmosphère en fonction de l'altitude
  www.deleze.name/marcel/physique/TemperaturesEbullition/index.html
- Modèle du nivellement barométrique
  www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/pression-altitude/index.html