Marcel Délèze
Edition 2017

§ 4 Différentielles partielles

Exemple

Considérons le volume du cylindre de rayon 0.4 et de hauteur 0.6

$$V(0.4,\ 0.6) = \pi\, 0.4^2 \times 0.6 = 0.096\, \pi$$

Comment varie le volume V du cylindre lorsqu'on augmente son rayon de Δr?

Le raisonnement que nous avons tenu dans le § 1 peut être appliqué à chaque variable. Calculons *l'accroissement du volume en (0.4; 0.6) par rapport à la variable r pour l'accroissement partiel Δr* (dénomination abrégée : *accroissement partiel):*

$$\begin{aligned} & V(0.4 + \Delta r,\ 0.6) - V(0.4;\ 0.6) \\ &= \pi\ (0.4 + \Delta r)^2\, 0.6 - \pi\, 0.4^2 \times 0.6 \\ &= \pi\, 0.6 \left(0.4^2 + 2 \times 0.4\, \Delta r + \Delta r^2 - 0.4^2\right) \\ &= \pi\, 0.6 \left(0.8\, \Delta r + \Delta r^2\right) \end{aligned}$$

Géométriquement, l'accroissement partiel représente le volume du cylindre creux (en forme de tuyau) dans le cas où les rayons intérieur et extérieur valent respectivement 0.4 et (0.4 + Δr).

Dans la prochaine figure, on a représenté les accroissements de V pour des accroissements partiels Δr compris entre 0 et 0.175 (observez les 7 segments verticaux).

On peut approximer l'accroissement partiel par la *différentielle partielle* du volume par rapport à r. La différentielle partielle est égale au produit de la dérivée partielle par l'accroissement de la variable *r*

$$\frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\, \Delta r = 0.48\, \pi\, \Delta r$$

Dans la prochaine figure, on a représenté la différentielle partielle de V pour Δr = 0.2 (observez le vecteur parallèle à l'axe des r et le vecteur parallèle à l'axe des V correspondant).

L'erreur d'approximation est la différence entre l'accroissement de la fonction et la différentielle

$$e(0.4,\ 0.6;\ \Delta r,\ 0) = V(0.4 + \Delta r,\ 0.6) - V(0.4,\ 0.6) - \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\, \Delta r = 0.6\, \pi\, \Delta r^2$$

Comparons l'accroissement partiel et la différentielle partielle pour des Δr qui tendent vers 0

Δr	**Accroissement partiel**	**Différentielle partielle**	**Erreur d'approximation**
0.20000	0.376991118	0.301592895	0.075398224
0.02000	0.030913272	0.030159289	0.000753982
0.00200	0.003023469	0.003015929	$7.539822369 \times 10^{-6}$
0.00020	0.000301668	0.000301593	$7.539822369 \times 10^{-8}$
0.00002	0.000030160	0.000030159	$7.539822369 \times 10^{-10}$

On peut constater que l'accroissement partiel et la différentielle partielle tendent tous deux vers 0 mais l'écart entre les deux tend vers 0 beaucoup plus vite encore. C'est pourquoi, pour de petits accroissements partiels Δr, on a

$$V(0.4+\Delta r,\ 0.6) - V(0.4,\ 0.6) \approx \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\,\Delta r$$

Comment varie le volume V du cylindre lorsqu'on augmente sa hauteur de Δh?

Le raisonnement que nous avons tenu dans le § 1 peut être appliqué à chaque variable. Calculons *l'accroissement du volume en (0.4, 0.6) par rapport à la variable h pour l'accroissement partiel Δh (*en abrégé*: accroissement partiel)*

$$\begin{aligned} &V(0.4,\ 0.6+\Delta h) - V(0.4,\ 0.6) \\ &= \pi\, 0.4^2\,(0.6+\Delta h) - \pi\, 0.4^2 \times 0.6 \\ &= \pi\, 0.4^2\,(0.6+\Delta h - 0.6) \\ &= \pi\, 0.16\,\Delta h \end{aligned}$$

Géométriquement, l'accroissement partiel représente le volume d'un cylindre de hauteur Δh.

Dans la prochaine figure, on a représenté les accroissements partiels de V pour des Δh compris entre 0 et 0.175 (observez les 7 segments verticaux).

On peut approximer l'accroissement partiel par la *différentielle partielle* du volume par rapport à h. La différentielle partielle est égale au produit de la dérivée partielle par l'accroissement partiel de la variable *h*

$$\frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\,\Delta h = 0.16\,\pi\,\Delta h$$

Dans la prochaine figure, on a représenté la différentielle partielle de V pour Δh = 0.2 (observez le vecteur parallèle à l'axe des h et le vecteur parallèle à l'axe des V correspondant).

L'erreur d'approximation est la différence entre l'accroissement de la fonction et la différentielle

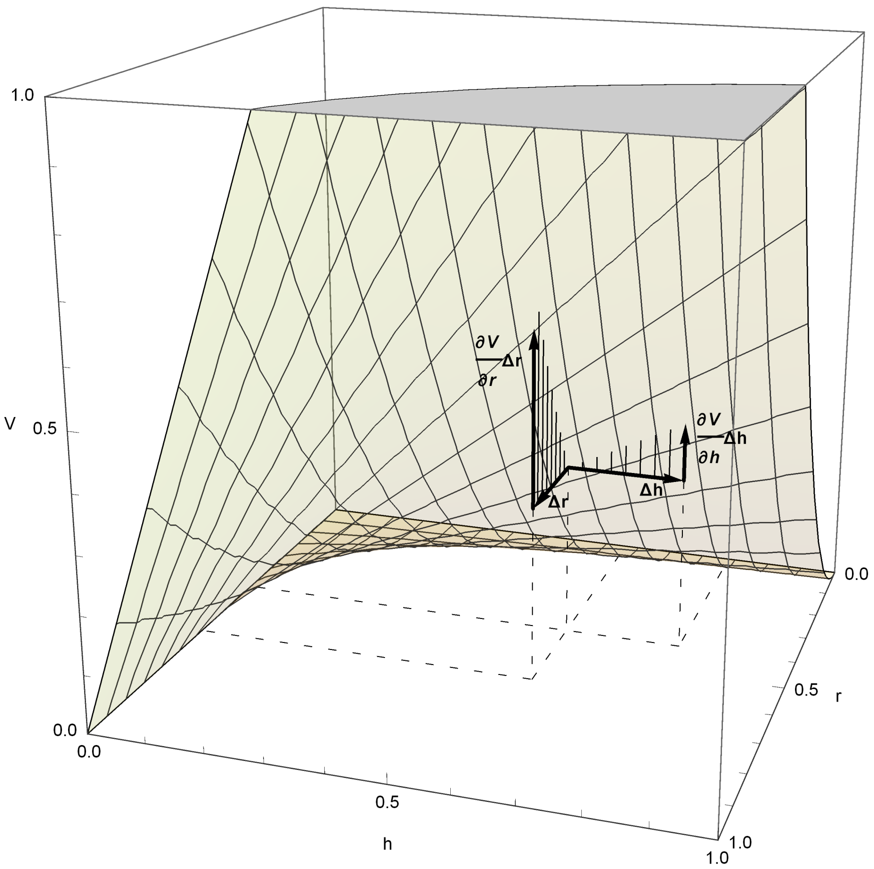
$$e(0.4,\ 0.6;\ 0,\ \Delta h) = V(0.4,\ 0.6+\Delta h) - V(0.4,\ 0.6) - \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\,\Delta h = 0$$

Comparons l'accroissement partiel et la différentielle partielle pour des Δh qui tendent vers 0

Δh	***Accroissement partiel***	***Différentielle partielle***	***Erreur d'approximation***
0.20000	0.100530965	0.100530965	0.
0.02000	0.010053096	0.010053096	0.
0.00200	0.001005310	0.001005310	0.
0.00020	0.000100531	0.000100531	0.
0.00002	0.000010053	0.000010053	0.

On peut constater que l'accroissement partiel et la différentielle partielle tendent tous deux vers 0. Dans ce cas particulier, l'accroissement partiel et la différentielle partielle sont parfaitement égaux

$$V(0.4,\ 0.6+\Delta h) - V(0.4,\ 0.6) = \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\,\Delta h$$



Accroissements des variables

Les accroissements des variables indépendantes *x*, *y*, ... (ou des arguments d'une fonction *f*(*x*, *y*, ...)) sont notés respectivement

$$\Delta x, \ \Delta y, \ \ldots$$

Un accroissement positif correspond à une augmentation de la variable correspondante, un accroissement négatif correspond à une diminution.

L'accroissement est appelé "partiel" lorsqu'un seul argument varie, tous les autres demeurant constants.

Accroissements partiels de la fonction et différentielles partielles

On définit *l'accroissement partiel de la fonction f par rapport à la variable x en (x, y) pour l'accroissement partiel Δx de la variable* comme différence des deux valeurs de la fonction

$$\boxed{\Delta f\ (x,\ y;\ \Delta x,\ 0) = f\ (x + \Delta x,\ y) - f\ (x,\ y)}$$

Dans la notation Δf(*x*, *y*; Δx, 0), le dernier 0 signifie Δy = 0 c'est-à-dire *y* = constante. En langage plus ramassé, on dit aussi "*accroissement partiel Δf en fonction de Δx*" ou bien "*accroissement Δf en fonction de Δx seulement*".

On définit aussi la *différentielle de f par rapport à la variable x en (x, y) pour l'accroissement partiel Δx* comme étant le produit de la dérivée partielle par l'accroissement partiel de la variable *x*

$$\boxed{df(x, y;\ \Delta x, 0) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x}$$

Dans la notation df(x, y; Δx, 0), le dernier 0 signifie Δy = 0 c'est-à-dire y = constante. En langage plus ramassé, on dit aussi "*différentielle partielle df en fonction de Δx*" ou bien "*différentielle df en fonction de Δx seulement*".

L'erreur d'approximation tend plus vite vers 0 que Δx

$$e(x, y;\ \Delta x, 0) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x$$

$$\text{avec} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e(x, y;\ \Delta x, 0)}{\Delta x} = 0$$

En particulier, pour de petits accroissements partiels de la variable, l'*accroissement partiel de la fonction* par rapport à x est approximativement égal à la *différentielle partielle* par rapport à x

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x$$

D'une manière analogue, on définit *l'accroissement partiel de la fonction f par rapport à la variable y en (x, y) pour l'accroissement partiel Δy de la variable* comme différence des deux valeurs de la fonction

$$\boxed{\Delta f(x, y;\ 0, \Delta y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

Dans la notation Δf(x, y; 0, Δy), le 0 signifie Δx = 0 c'est-à-dire x = constante. En langage plus ramassé, on dit aussi "*accroissement partiel Δf en fonction de Δy*" ou bien "*accroissement Δf en fonction de Δy seulement*".

On définit aussi la *différentielle de f par rapport à la variable y en (x, y) pour l'accroissement partiel Δy* comme étant le produit de la dérivée partielle par l'accroissement partiel de la variable y

$$\boxed{df(x, y;\ 0, \Delta y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y}$$

Dans la notation df(x, y; 0, Δy), le 0 signifie Δx = 0 c'est-à-dire x = constante. En langage plus ramassé, on dit aussi "*différentielle partielle df en fonction de Δy*" ou bien "*différentielle df en fonction de Δy seulement*".

L'erreur d'approximation tend plus vite vers 0 que Δy

$$e(x, y;\ 0, \Delta y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

$$\text{avec} \qquad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{e(x, y;\ 0, \Delta y)}{\Delta y} = 0$$

En particulier, pour de petits accroissements partiels de la variable, l'accroissement de la fonction par rapport à y est approximativement égal à la différentielle par rapport à y

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

La définition s'étend naturellement aux fonctions de trois variables ou plus. Ainsi, l*a différentielle de f par rapport à z en* (x, y, z) *pour l'accroissement partiel Δz* est égale au produit de la dérivée partielle par l'accroissement partiel de z.

$$\boxed{df(x, y, z;\ 0, 0, \Delta z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z}$$

Dans la notation df(x, y, z; 0, 0, Δz), les deux 0 signifient $\Delta x = 0$ et $\Delta y = 0$ c'est-à-dire x = constante et y = constante. En langage plus ramassé, on dit aussi "*différentielle partielle df en fonction de Δz*" ou bien "*différentielle df en fonction de Δz seulement*".

Pour de petits accroissements partiels de la variable, l'accroissement partiel de la fonction par rapport à z est approximativement égal à la différentielle par rapport à z

$$f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \approx \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z$$

Exemple : application à la physique

D'après la loi des gaz parfaits

$$p V = n R T$$

La pression p dépend donc du volume V, de la quantité de matière n (en moles) et de la température T (en kelvins).

$$\boxed{p(V, n, T) = \frac{n R T}{V}} \qquad \text{où R est une constante}$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial p(V, n, T)}{\partial V} = n R T \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{n R T}{V^2}$$
$$\frac{\partial p(V, n, T)}{\partial n} = \frac{R T}{V} \frac{\partial}{\partial n}(n) = \frac{R T}{V}$$
$$\frac{\partial p(V, n, T)}{\partial T} = \frac{n R}{V} \frac{\partial}{\partial T}(T) = \frac{n R}{V}$$

Différentielles partielles dp

$$\frac{\partial p(V, n, T)}{\partial V} \Delta V = -\frac{n R T}{V^2} \Delta V$$
$$\frac{\partial p(V, n, T)}{\partial n} \Delta n = \frac{R T}{V} \Delta n$$
$$\frac{\partial p(V, n, T)}{\partial T} \Delta T = \frac{n R}{V} \Delta T$$

Accroissements partiels approximés par les différentielles partielles $\Delta p \approx dp$

$$\frac{n R T}{V + \Delta V} - \frac{n R T}{V} \approx -\frac{n R T}{V^2} \Delta V$$
$$\frac{(n + \Delta n) R T}{V} - \frac{n R T}{V} = \frac{R T}{V} \Delta n$$
$$\frac{n R (T + \Delta T)}{V} - \frac{n R T}{V} = \frac{n R}{V} \Delta T$$

Accroissements partiels relatifs
différentielles partielles relatives

A propos d'un cylindre droit, considérons $V = \pi r^2 h$. Supposons que la hauteur h soit constante. Alors

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r = 2\pi r h \Delta r$$

Si $V = 10\ m^3$ et $\Delta V = 0.1\ m^3$, on dira que l'accroissement partiel relatif de volume est de 1 % car

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0.1\ m^3}{10\ m^3} = 0.01 = 1\ \%$$

La notation complète est $\frac{\Delta V\ (r, h;\ \Delta r,\ 0)}{V\ (r, h)}$.

On peut exprimer l'accroissement partiel relatif de volume en fonction de l'accroissement relatif du rayon

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{2\pi r h \Delta r}{\pi r^2 h} = 2\frac{\Delta r}{r}$$

C'est ainsi que, si le rayon du cylindre augmente de 2 %, le volume augmentera de 4 % (sous l'hypothèse que la hauteur soit constante).

La quantité $\frac{dV}{V}$ est appelée différentielle partielle relative. La notation complète est $\frac{dV\ (r, h;\ \Delta r,\ 0)}{V\ (r, h)}$.

Application à la géométrie analytique

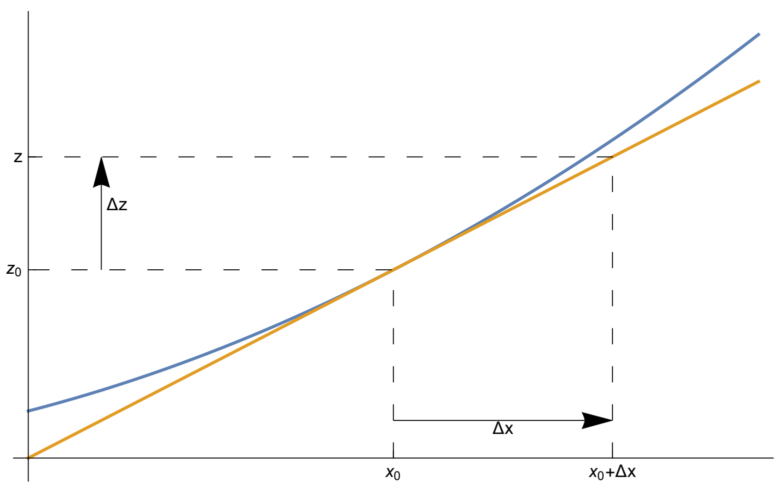
Considérons la fonction $z = f(x, y)$ au voisinage du point (x_0, y_0). Par quel système d'équations décrire la doite qui est située dans le plan vertical parallèle à l'axe des x et tangente à la surface au point (x_0, y_0) ?

La première condition est que y est constant :

$y = y_0$

Géométriquement, cette équation représente un plan qui est vertical et parallèle à l'axe des x.

Pour exprimer la deuxième condition, dessinons une coupe à travers la surface $z = f(x, y)$ selon le plan $y = y_0$.



Dans ce plan, l'équation de la droite est

$$\Delta z = \frac{\partial f\ (x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x \qquad \Longleftrightarrow \qquad z - z_0 = \frac{\partial f\ (x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0)$$

Finalement, dans l'espace, la droite est décrite par le système

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_0 \\ z - z_0 &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) \end{aligned}}$$

Exercices du § 4

Exercice 4-1 Calculs à la main

Pour $E = \frac{1}{2} m v^2$, en $(m, v) = \left(2\,\text{kg}, 5\,\frac{m}{s}\right)$, calculez à la main

a) les *différentielles partielles* dE en fonction de Δm et dE en fonction de Δv;

b) au moyen d'une approximation linéaire, les *accroissements partiels* suivants:

* l'augmentation d'énergie lorsque la masse augmente de 0.1 kg, la vitesse restant inchangée;
* l'augmentation d'énergie lorsque la vitesse augmente de 0.2 $\frac{m}{s}$, la masse demeurant inchangée.

Exercice 4-2 Interprétations géométriques

a) Avec *Mathematica*, dessinez la fonction $I = \frac{U}{R}$ sur le domaine [5 V, 15 V] × [500 Ω, 1500 Ω] puis imprimez le graphique.

b) Calculez à la main les expressions suivantes en $(U, R) = (10\,V, 1000\,\Omega)$

$$\frac{\partial I(U, R)}{\partial U} \Delta U$$

$$\frac{\partial I(U, R)}{\partial R} \Delta R$$

c) Dites comment se nomme chaque expression.

d) Expliquez et dessinez sur le graphique de I ce que représente chaque expression du point de vue géométrique.

Exercice 4-3 Calculs avec Mathematica

Pour $v = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}$, en $(x, y, t) = (3\,m, 2\,m, 5\,s)$, calculez avec *Mathematica*

a) les *différentielles partielles* dv en fonction de Δx et dv en fonction de Δt;

b) au moyen d'une approximation linéaire, les *accroissements partiels* suivants:

* la variation de vitesse lorsque l'abscisse augmente de 0.1 m;
* la variation de vitesse lorsque le temps augmente de 0.2 s;

c) les *erreurs d'approximation* pour la partie c;

d) les *différentielles partielles relatives* $\frac{dv}{v}$ en fonction de Δx et $\frac{dv}{v}$ en fonction de Δt;

e) au moyen d'une approximation linéaire, les *accroissements partiels relatifs* $\frac{\Delta v}{v}$ lorsque x augmente de 1 % et $\frac{\Delta v}{v}$ lorsque t augmente de 1 %.

Exercice 4-4

Pour $v = \sqrt{2\,g\,h}$, en $(g, h) = \left(9.81\,\frac{m}{s^2}, 2\,m\right)$, calculez à la main

a) les *différentielles partielles* dv en fonction de Δg et dv en fonction de Δh;

b) au moyen d'une approximation linéaire, les *accroissements partiels* suivants:

* la variation de vitesse lorsque l'accélération gravifique diminue de 0.1 $\frac{m}{s^2}$;
* la variation de vitesse lorsque la hauteur de chute diminue de 0.05 m;

c) les *différentielles partielles relatives* $\frac{dv}{v}$ en fonction de Δg et $\frac{dv}{v}$ en fonction de Δh;

d) au moyen d'une approximation linéaire, les *accroissements partiels relatifs* $\frac{\Delta v}{v}$ lorsque *g* diminue de 1 % et $\frac{\Delta v}{v}$ lorsque *h* diminue de 1 %.

Exercice 4-5

On considère les objets géométriques d'équation

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

Sous l'hypothèse $c \neq 0$, on peut mettre l'équation sous la forme explicite

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \Longleftrightarrow z = -\frac{a}{c}\,x - \frac{b}{c}\,y - \frac{d}{c} \Longleftrightarrow z = \tilde{a}\,x + \tilde{b}\,y + \tilde{d}$$

Considérons le cas particulier

$$z = 3\,x - 2\,y + 5$$

a) Faites une représentation graphique (avec *Mathematica*).

b) (Par un calcul à la main,) montrez que, pour y fixé, la quantité suivante est constante

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

c) Interprétez géométriquement le résultat précédent comme étant
la pente dans une direction donnée. Comment la pente dépend-elle de (x, y) ?

d) Montrez que, pour x fixé, la quantité suivante est constante

$$\frac{\Delta z}{\Delta y}$$

e) Interprétez géométriquement le résultat précédent comme étant
la pente dans une direction donnée. Comment la pente dépend-elle de (x, y) ?

f) Quel objet géométrique représente l'équation donnée ?

Exercice 4-6 Application à la géométrie analytique

On donne l'équation d'une surface

$$z = 2\,x^2 - 5\,y^2$$

a) Déterminez le système d'équations cartésiennes de la droite qui est située dans un plan vertical parallèle au plan (x, z) et qui est tangente à la surface au point $(x_0, y_0) = (3, -1)$.

b) Déterminez le système d'équations cartésiennes de la droite qui est située dans un plan vertical parallèle au plan (y, z) et qui est tangente à la surface au point $(x_0, y_0) = (3, -1)$.

Exercice 4-7 Application à la physique : l'horloge à balancier

La période de l'horloge à balancier est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\,(1+\alpha\,\Delta\theta)}{g}}$$

où T = période (= durée d'une oscillation);
L = longueur du bras du balancier à la température de référence (disons $\theta_0 = 20\,°\mathrm{C}$);
α = coefficient de dilatation linéaire du bras du balancier (à la température de référence);
$\Delta\theta = \theta - \theta_0$ = variation de température par rapport à la température de référence;
g = accélération gravifique locale (disons $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$).

On suppose que l'horloge est réglée pour la température de référence. Si la température de fonctionnement est supérieure à θ_0, le bras du balancier est plus long, la période est plus grande et l'horloge retarde. Si la température de fonctionnement est inférieure à θ_0, le bras du balancier est plus court, la période est plus petite et l'horloge avance. L'heure affichée par l'horloge après 24 h de fonctionnement est proportionnelle au nombre de périodes et donc inversément proportionnelle à la période

$$H(\theta) = k\,\frac{24\text{ h}}{T} = \frac{k\,24\text{ h}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L\,(1+\alpha\,(\theta-\theta_0))}}$$

où k est une constante (c'est-à-dire ne dépend pas de θ). On appelle dérive journalière l'avance ou le retard ΔH que prend l'horloge en 24 h.

Pour se débarrasser de la constante k, on calcule la différentielle partielle relative

$$\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{dH}{H} \qquad \text{en fonction de } \theta, \text{ en } \theta_0$$

Il est alors aisé d'obtenir la dérive journalière

$$\Delta H \approx \frac{dH}{H}\cdot(24\text{ h}) \qquad \text{en fonction de } \theta, \text{ en } \theta_0$$

a) Calculez à la main la dérive journalière ΔH en fonction de la variation de température.

b) Pour diminuer la dérive journalière ΔH, vaut-il mieux que le balancier soit long ou court ?

§ 5 Différentielle totale

§ 5-1 Exemple

Considérons le volume du cylindre de rayon 0.4 et de hauteur 0.6

$$V\,(0.4;\ 0.6) = \pi\, 0.4^2 \times 0.6 = 0.096\,\pi$$

Comment varie le volume V du cylindre lorsqu'on augmente son rayon de Δr **et** sa hauteur de Δh?
On parle alors d'*accroissement total de la fonction f en (0.4, 0.6) pour l'accroissement* (*Δr, Δh*)

$$\boxed{\Delta V\,(0.4,\ 0.6;\ \Delta r,\ \Delta h) = V\,(0.4 + \Delta r,\ 0.6 + \Delta h) - V\,(0.4,\ 0.6)}$$
$$= \pi\,(0.4 + \Delta r)^2\,(0.6 + \Delta h) - \pi\, 0.4^2 \times 0.6$$

Géométriquement, l'accroissement total représente le volume du cylindre creux dans le cas où les rayons intérieur et extérieur valent respectivement 0.4 et (0.4 + Δr) et les hauteurs intérieure et extérieure valent respectivement 0.6 et (0.6 + Δh).

Est-il possible d'approximer l'accroissement total avec des différentielles partielles ?

Remplaçons d'abord l'accroissement total par la somme de deux accroissements partiels

$$V\,(0.4 + \Delta r,\ 0.6 + \Delta h) - V\,(0.4,\ 0.6) =$$
$$(V\,(0.4 + \Delta r,\ 0.6 + \Delta h) - V\,(0.4,\ 0.6 + \Delta h)) + (V\,(0.4,\ 0.6 + \Delta h) - V\,(0.4,\ 0.6))$$
$$= \Delta V\,(0.4,\ 0.6 + \Delta h;\ \Delta r,\ 0) + \Delta V\,(0.4,\ 0.6;\ 0,\ \Delta h)$$

Une première approximation consiste à remplacer chaque accroissement partiel par la différentielle partielle correspondante

$$\approx \frac{\partial V\,(0.4,\ 0.6 + \Delta h)}{\partial r}\,\Delta r + \frac{\partial V\,(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\,\Delta h$$
$$= 2\,\pi\, 0.4\,(0.6 + \Delta h)\,\Delta r + \pi\, 0.4^2\,\Delta h$$

Effectuons maintenant une deuxième approximation en remplaçant la dérivée partielle en (0.4, 0.6 + Δh) par la dérivée partielle en (0.4, 0.6)

$$\frac{\partial V\,(0.4,\ 0.6 + \Delta h)}{\partial r}\,\Delta r + \frac{\partial V\,(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\,\Delta h$$
$$\approx \frac{\partial V\,(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\,\Delta r + \frac{\partial V\,(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\,\Delta h$$
$$= 2\,\pi\, 0.4 \times 0.6\,\Delta r + \pi\, 0.4^2\,\Delta h$$

Cette dernière expression est appelée *différentielle totale de V en* (0.4, 0.6) *pour l'accroissement* (Δr, Δh).
En d'autres termes, ***la différentielle totale est la somme des différentielles partielles***.
Comparons l'accroissement total avec les approximations pour quelques valeurs numériques

Δr	Δh	Accroissement total $V(0.4+\Delta r,\ 0.6+\Delta h) - V(0.4,\ 0.6)$	1-ère approximation $\frac{\partial V(0.4,\ 0.6+\Delta h)}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\Delta h$	Différentielle totale $\frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\Delta h$
0.100	0.100	0.248186	0.226195	0.201062
0.100	0.010	0.177500	0.158336	0.155823
0.100	0.001	0.170431	0.151550	0.151299
0.010	0.100	0.068078	0.067858	0.065345
0.010	0.010	0.020549	0.020358	0.020106
0.010	0.001	0.015796	0.015607	0.015582
0.001	0.100	0.052027	0.052025	0.051773
0.001	0.010	0.006562	0.006560	0.006535
0.001	0.001	0.002015	0.002013	0.002011

Pour la première approximation, l'erreur est

$$\text{Expand}\left[\left(\pi\left(\frac{4}{10}+\Delta r\right)^2\left(\frac{6}{10}+\Delta h\right)-\pi\left(\frac{4}{10}\right)^2\frac{6}{10}\right)-\left(2\pi\frac{4}{10}\left(\frac{6}{10}+\Delta h\right)\Delta r+\pi\left(\frac{4}{10}\right)^2\Delta h\right)\right]$$

développe

$$\frac{3\pi\,\Delta r^2}{5}+\pi\,\Delta h\,\Delta r^2$$

dont on peut dire que,

si $|\Delta r| < \epsilon$ et $|\Delta h| < \epsilon$ et $\epsilon \to 0$

alors l'erreur tend vers 0 plus vite que ϵ.

L'erreur entre les deux approximations est

$$\text{Expand}\left[\left(2\pi\frac{4}{10}\left(\frac{6}{10}+\Delta h\right)\Delta r+\pi\left(\frac{4}{10}\right)^2\Delta h\right)-\left(2\pi\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\Delta r+\pi\left(\frac{4}{10}\right)^2\Delta h\right)\right]$$

développe

$$\frac{4\pi\,\Delta h\,\Delta r}{5}$$

dont on peut aussi dire que,

si $|\Delta r| < \epsilon$ et $|\Delta h| < \epsilon$ et $\epsilon \to 0$

alors l'erreur tend vers 0 plus vite que ϵ.

Finalement, pour des Δr et Δh assez petits, on a l'approximation

$$V(0.4+\Delta r,\ 0.6+\Delta h) - V(0.4,\ 0.6) \approx \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\Delta h$$

L'expression

$$\frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\Delta h$$

est appelée *différentielle totale de V en (0.4, 0.6) pour l'accroissement (Δr, Δh)* et est notée

$$\boxed{dV(0.4,\ 0.6;\ \Delta r,\ \Delta h) = \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V(0.4,\ 0.6)}{\partial h}\Delta h}$$

Pour de petites valeurs de Δr et Δh, on peut approximer l'accroissement total par la différentielle totale

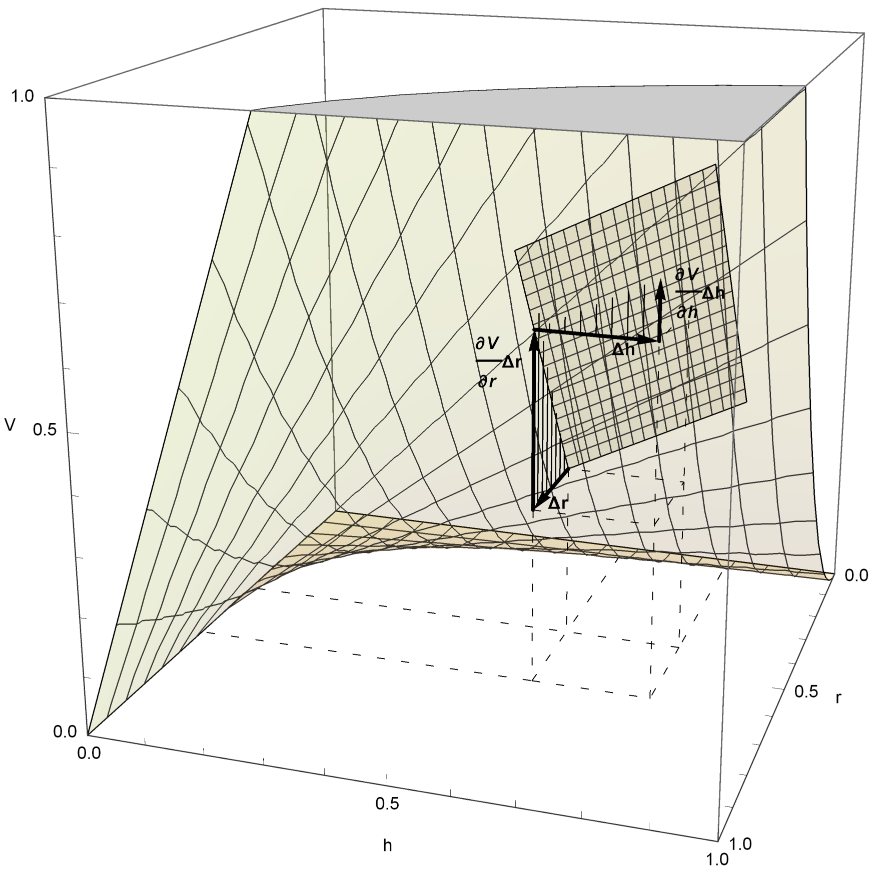
$\boxed{\Delta V\,(0.4,\ 0.6;\ \Delta r,\ \Delta h) \approx dV\,(0.4,\ 0.6;\ \Delta r,\ \Delta h)}$

Exercice

Au moyen de la calculatrice, recalculez le tableau précédent qui donne les valeurs numériques de l'accroissement total et de la différentielle totale pour certains accroissements (Δr, Δh) donnés.

Interprétation géométrique

Graphiquement, l'*accroissement total* peut être représenté par une *surface* tandis que la *différentielle totale*, qui est la meilleure approximation linéaire de V, est représentée par un *plan* qui est tangent à la surface en (0.4, 0.6).



Pour les accroissements Δr et Δh, les différentielles *partielles* sont représentées par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial r}\,\Delta r \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta h \\ \frac{\partial f}{\partial h}\,\Delta h \end{pmatrix}$$

dont la somme vectorielle représente la différentielle *totale* pour l'accroissement (Δr, Δh)

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta h \\ \frac{\partial f}{\partial r}\,\Delta r + \frac{\partial f}{\partial h}\,\Delta h \end{pmatrix}$$

Sur l'ensemble des accroissements, les différentielles *partielles* sont représentées par deux *droites* tangentes à la surface tandis que la différentielle *totale* est représentée par le *plan* qui contient ces deux droites.

§ 5-2 Différentielle totale

Accroissements des variables

Les accroissements des variables indépendantes x, y, ... (ou des arguments d'une fonction $f(x, y, \ldots)$) sont notés respectivement

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \ldots$$

Un accroissement positif correspond à une augmentation de la variable correspondante, un accroissement négatif correspond à une diminution.

Accroissement total de la fonction

On appelle *accroissement total de la fonction f en (x, y) pour l'accroissement (Δx, Δy) des variables* l'expression

$$\boxed{\Delta f(x, y; \Delta x, \Delta y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

Différentielle totale

On appelle *différentielle totale de la fonction f en (x, y) pour l'accroissement (Δx, Δy)* la somme des différentielles partielles

$$\boxed{df(x, y; \Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y}$$

Erreur d'approximation

$$\boxed{e(x, y; \Delta x, \Delta y) = \Delta f(x, y; \Delta x, \Delta y) - df(x, y; \Delta x, \Delta y)}$$

$$= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)) - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \right)$$

Existence de la différentielle totale

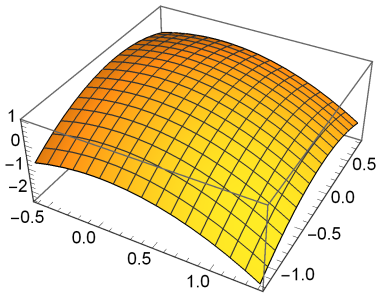
La différentielle totale de la fonction f en (x, y) existe si et seulement si il existe une fonction linéaire de deux variables $(\Delta x, \Delta y) \mapsto a\,\Delta x + b\,\Delta y$ telle que l'erreur d'approximation de f par la fonction linéaire tend vers 0 plus vite que la norme de $(\Delta x, \Delta y)$, c'est-à-dire

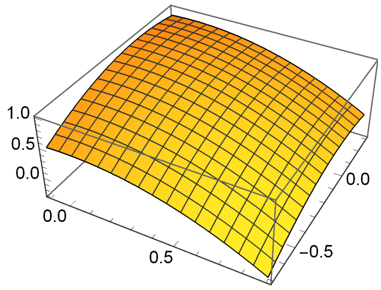
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{e(x, y; \Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

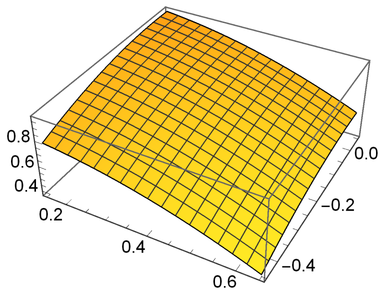
Une *condition suffisante* pour l'existence de la différentielle totale est que *les dérivées partielles existent et sont continues dans un voisinage de* (x, y).

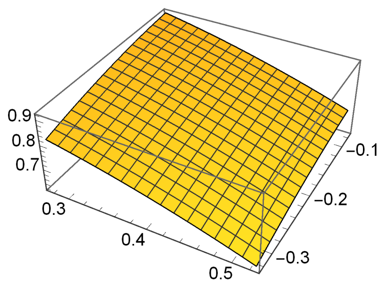
Interprétations géométriques

Si on effectue une suite de zooms successifs autour du point $(x, y, f(x, y))$, la surface apparaît de plus en plus proche d'un plan appelé "plan tangent".









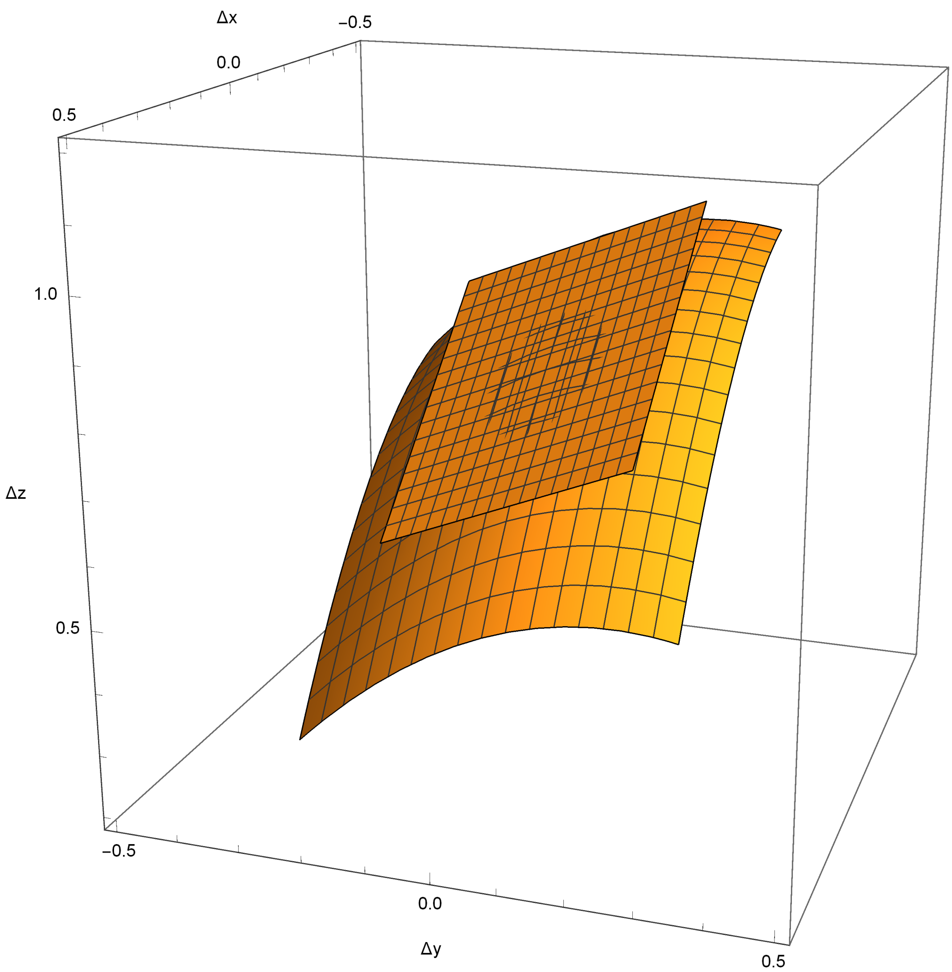
On peut montrer que la différentielle totale représente la meilleure approximation linéaire de l'accroissement total. Graphiquement, l'accroissement total est représenté par une surface tandis que la différentielle totale est représentée par le plan tangent à la surface en (x, y).

En considérant que l'origine est située au point de tangence $(x,\ y,\ f(x,\ y))$, par un changement de variables, la *surface* est décrite par la fonction de deux variables

$$(\Delta x,\ \Delta y) \mapsto \Delta f\ (x,\ y;\ \Delta x,\ \Delta y) = f\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f\ (x,\ y)$$

tandis que le *plan tangent* est décrit par la fonction linéaire de deux variables

$$(\Delta x,\ \Delta y) \mapsto df\ (x,\ y;\ \Delta x,\ \Delta y) = \frac{\partial f\ (x,\ y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f\ (x,\ y)}{\partial y}\,\Delta y$$



La fonction

$$e(x, y; \Delta x, \Delta y) = \Delta f(x, y; \Delta x, \Delta y) - df(x, y; \Delta x, \Delta y)$$

représente l'*écart*, mesuré parallèlement à l'axe des *z*, entre le plan tangent et la surface.

Equation cartésienne du plan tangent à une surface

Etant donné une surface décrite par la fonction *f* de deux variables

$$z = f(x, y)$$

et le point (x_0, y_0) dans l'ensemble de définition de *f*, la différentielle est la fonction linéaire qui représente le plan tangent à la surface. L'équation cartésienne de ce plan est

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

En substituant $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$, on obtient l'équation cartésienne du plan tangent affine

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0)}$$

Accroissement total et dérivée totale d'une fonction de trois variables

Pour une fonction à trois variables,

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z) \approx \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\Delta z \end{array}}$$

Cette formule se généralise à un nombre quelconque de variables.

Exemple : application à la physique, calculs à la main

D'après la loi des gaz parfaits

$$\boxed{p(V,\ n,\ T) = \frac{n\,R\,T}{V}} \qquad \text{où R est une constante}$$

Accroissement total Δp

$$\begin{aligned} &\Delta p(V,\ n,\ T;\ \Delta V,\ \Delta n,\ \Delta T) \\ &= p(V+\Delta V,\ n+\Delta n,\ T+\Delta T) - p(V,\ n,\ T) \\ &= \frac{(n+\Delta n)\,R\,(T+\Delta T)}{V+\Delta V} - \frac{n\,R\,T}{V} \end{aligned}$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial p(V,\ n,\ T)}{\partial V} = -\frac{n\,R\,T}{V^2}$$

$$\frac{\partial p(V,\ n,\ T)}{\partial n} = \frac{R\,T}{V}$$

$$\frac{\partial p(V,\ n,\ T)}{\partial T} = \frac{n\,R}{V}$$

Différentielle totale dp

$$\begin{aligned} &dp(V,\ n,\ T;\ \Delta V,\ \Delta n,\ \Delta T) \\ &= \frac{\partial p(V,\ n,\ T)}{\partial V}\Delta V + \frac{\partial p(V,\ n,\ T)}{\partial n}\Delta n + \frac{\partial p(V,\ n,\ T)}{\partial T}\Delta T \\ &= -\frac{n\,R\,T}{V^2}\Delta V + \frac{R\,T}{V}\Delta n + \frac{n\,R}{V}\Delta T \end{aligned}$$

Accroissement total approximé par la différentielle totale : Δp ≈ dp

$$\frac{(n+\Delta n)\,R\,(T+\Delta T)}{V+\Delta V} - \frac{n\,R\,T}{V} \approx -\frac{n\,R\,T}{V^2}\Delta V + \frac{R\,T}{V}\Delta n + \frac{n\,R}{V}\Delta T$$

Calcul de la différentielle totale avec *Mathematica* (exemples)

Il est possible de calculer la différentielle totale avec les formules du cours qui font appel aux dérivées partielles. Par exemple, sans définir de fonction *p*,

```
Clear[V, n, T];
```

efface

$$\partial_V\left(\frac{n\,R\,T}{V}\right)\Delta V + \partial_n\left(\frac{n\,R\,T}{V}\right)\Delta n + \partial_T\left(\frac{n\,R\,T}{V}\right)\Delta T$$

$$\frac{R\,T\,\Delta n}{V} + \frac{n\,R\,\Delta T}{V} - \frac{n\,R\,T\,\Delta V}{V^2}$$

ou en définissant une fonction *p*

```
Clear[p, R];
```
efface

$$p[V\_, n\_, T\_] := \frac{n\,R\,T}{V};$$

$$\partial_V\, p[V, n, T]\, \Delta V + \partial_n\, p[V, n, T]\, \Delta n + \partial_T\, p[V, n, T]\, \Delta T$$

$$\frac{R\,T\,\Delta n}{V} + \frac{n\,R\,\Delta T}{V} - \frac{n\,R\,T\,\Delta V}{V^2}$$

Mais il peut être avantageux de demander à *Mathematica* de calculer directement la différentielle totale. Le symbole de la différentielle totale est Dt[...].

$$Dt\left[\frac{n\,R\,T}{V}\right]$$
dérivée totale

$$\frac{R\,T\,Dt[n]}{V} + \frac{n\,T\,Dt[R]}{V} + \frac{n\,R\,Dt[T]}{V} - \frac{n\,R\,T\,Dt[V]}{V^2}$$

Dans la réponse, Dt[*n*] représente Δn, Dt[*T*] représente ΔT et Dt[*V*] représente ΔV.
Il faut encore indiquer que R est une constante, c'est-à-dire $\Delta R = 0$.

$$Dt\left[\frac{n\,R\,T}{V}\right] \;/.\; \{Dt[V] \to \Delta V,\ Dt[n] \to \Delta n,\ Dt[T] \to \Delta T,\ Dt[R] \to 0\}$$
dérivée totale dérivée totale dérivée totale dérivée totale dérivée totale

$$\frac{R\,T\,\Delta n}{V} + \frac{n\,R\,\Delta T}{V} - \frac{n\,R\,T\,\Delta V}{V^2}$$

Exercices du § 5

Exercice 5-1

Pour $E = \frac{1}{2} m v^2$, en $(m, v) = \left(2\,\text{kg}, 5\,\frac{m}{s}\right)$, calculez à la main

a) l'accroissement total ΔE et développez l'expression;
b) la différentielle totale dE et comparez avec ΔE;
c) l'approximation linéaire de l'accroissement total pour $\Delta m = 0.1$ kg et $\Delta v = 0.2\,\frac{m}{s}$.
d) En quelle unité s'exprime le résultat ?

Exercice 5-2

Pour $I = \frac{U}{R}$, en $(U, R) = (10\,V, 1000\,\Omega)$,

a) calculez à la main
 l'accroissement total ΔI
 la différentielle totale dI;
 au moyen de dI, la valeur approchée de I pour $(U, R) = (9.5\,V, 1010\,\Omega)$;
b) avec *Mathematica*, représentez graphiquement ΔI et dI.

Exercice 5-3

Pour $v = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}$, en $(x, y, t) = (3\,m, 2\,m, 5\,s)$, calculez avec *Mathematica*

a) l'accroissement total Δv;
b) l'accroissement total relatif $\frac{\Delta v}{v}$;

c) la différentielle totale dv;
d) l'erreur d'approximation de Δv par dv;
e) la différentielle totale relative $\frac{dv}{v}$;
f) l'approximation linéaire de l'accroissement total relatif lorsque *x* et *y* augmentent de 1 % et *t* diminue de 1 % .

Exercice 5-4

On s'intéresse à la composante tangentielle T d'une force $\vec{F}$ qui forme un angle α avec la direction du déplacement. Pour $T = F\cos(\alpha)$, calculez

a) les dérivées partielles avec *Mathematica;*
b) la *différentielle totale* dT en $(F,\ \alpha) = (36\,N,\ 0.85\,\text{rad})$, à la main;
c) au moyen d'une approximation linéaire, la *variation totale* ΔT lorsque *F* diminue de 0.3 *N* et α augmente de 0.02 rad.

Exercice 5-5 Application à la géométrie analytique

a) Déterminez l'équation du plan tangent à la surface

$$z = 1 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}y^2 \qquad \text{au point} \qquad (x_0,\ y_0) = (-2,\ 3)$$

b) Déterminez l'équation du plan tangent à la surface

$$z = 15 + x^2 - \frac{1}{2}y^2 \qquad \text{au point} \qquad (x_0,\ y_0) = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}\right)$$

Exercice 5-6 Application à la géodésie : le problème du terrain plat

On considère un terrain carré de 160 m de côté. On aimerait que ce terrain soit absolument plat et horizontal. Selon les instruments utilisés, la question possède deux interprétations distinctes

a) En chaque point du terrain, on utilise le fil à plomb pour déterminer la verticalité et le niveau à bulle pour l'horizontalité. Le terrain est alors une portion de sphère.
b) Au point milieu du terrain, on utilise le fil à plomb pour déterminer la verticalité et le niveau à bulle pour l'horizontalité. A partir du centre, on utilise des rayons lumineux rectilignes pour déterminer une surface parfaitement plane et horizontale. Le terrain est alors une portion de plan.

Evaluez la différence entre les deux modèles; plus précisément, quel est l'ordre de grandeur de la différence d'altitude aux coins du terrain ?

Indication : l'équation de la sphère de rayon *r* est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \text{où} \qquad r \approx 6.371 \times 10^6\ \text{m}$$

Exercice 5-7

L'expression suivante représente la masse d'un cylindre homogène

$$m = \pi\, r^2\, h\, \rho$$

Sachant que ρ a diminué de 0.7 % et que h a augmenté de 0.3 %, comment *r* doit-il varier pour que la masse reste inchangée ?

De quel avantage bénéficie-t-on en résolvant le problème avec la différentielle ?

Liens

Vers les corrigés des exercices des § 4 et 5:

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/plusieurs-variables/4_et_5-differentielles-cor.pdf

Vers la page mère : Applications des mathématiques

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html