Marcel Délèze
Edition 2017

§ 2 Interpolation orthogonale

§ 2.1 Interpolation diagonale, interpolation de Lagrange

Motivation et définition

Lorsque le nombre de points est élevé, la résolution du système d'équations représente un travail considérable. Est-il possible de résoudre un problème d'interpolation en évitant les calculs consacrés à la résolution du système d'équations? Une idée est la suivante: si on peut choisir les fonctions de base et les abscisses d'échantillonnage de manière que la matrice du système soit diagonale, alors la résolution du système est immédiate et la solution du problème d'interpolation peut s'écrire explicitement.

Hypothèse: la matrice du système linéaire est diagonale, c'est-à-dire les coefficients diagonaux sont non nuls et les coefficients non diagonaux sont nuls; avec les notations du § 1.3,

$$\text{pour} \quad i = 0, \ \ldots, \ n-1, \qquad \text{on a} \qquad b_i(x_i) \neq 0;$$

$$\text{pour} \quad i \neq j, \qquad \text{on a} \qquad b_i(x_j) = 0$$

On dit alors que l'interpolation est diagonale.

Conclusion: la solution du système linéaire est immédiate

$$c_0 = \frac{y_0}{b_0(x_0)}, \quad c_1 = \frac{y_1}{b_1(x_1)}, \quad \ldots, \quad c_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{b_{n-1}(x_{n-1})}$$

et la réponse du problème d'interpolation s'écrit explicitement comme suit

$$g(t) = \frac{y_0}{b_0(x_0)} b_0(t) + \frac{y_1}{b_1(x_1)} b_1(t) + \ldots + \frac{y_{n-1}}{b_{n-1}(x_{n-1})} b_{n-1}(t)$$

Base de Lagrange

Pour l'interpolation polynomiale, la base de Lagrange est une liste de fonctions de base qui est construite de manière à réaliser une interpolation diagonale.

Exemple introductif

Déterminer le polynôme de degré ≤ 2 qui passe par les 3 points

$$P_0(1;\ 3), \quad P_1(2;\ 5), \quad P_2(3;\ -1)$$

Première méthode: Choisissons les fonctions de base $\{1,\ t,\ t^2\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice du système linéaire est pleine et la résolution demande beaucoup de calculs.

$$g(t) = -7 + 14\,t - 4\,t^2$$

Deuxième méthode: En nous inspirant de l'exercice 1-3, choisissons mieux les polynômes de base $\{1,\ t-1,\ (t-1)(t-2)\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est triangulaire, ce qui diminue de beaucoup le temps de calcul.

$$g(t) = 3 + 2(t-1) - 4(t-1)(t-2)$$

<u>Troisième méthode</u>: Choisissons plus adroitement encore les fonctions de base $\{(t-2)(t-3),\ (t-1)(t-3),\ (t-1)(t-2)\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations est diagonal.

Le travail de résolution du système est réduit à peu de chose.

$$g(t) = \frac{3}{2}(t-2)(t-3) + \frac{5}{-1}(t-1)(t-3) + \frac{-1}{2}(t-1)(t-2)$$

<u>Quatrième méthode</u>: Choisissons les fonctions de base suivantes appelées *base de Lagrange* $\left\{\frac{(t-2)(t-3)}{(1-2)(1-3)},\ \frac{(t-1)(t-3)}{(2-1)(2-3)},\ \frac{(t-1)(t-2)}{(3-1)(3-2)}\right\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice du système d'équations est la matrice identité.

Les coefficients cherchés sont les ordonnées des points donnés.

$$g(t) = 3\frac{(t-2)(t-3)}{(1-2)(1-3)} + 5\frac{(t-1)(t-3)}{(2-1)(2-3)} + (-1)\frac{(t-1)(t-2)}{(3-1)(3-2)}$$

Définition de la base de Lagrange

$$L_0(t) = \frac{(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}$$

$$L_1(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_2)\ldots(t-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})}$$

$$L_2(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_3)\ldots(t-x_{n-1})}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n-1})}$$

...

$$L_{n-1}(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}$$

Au <u>numérateur</u>, il y a exactement $(n-1)$ facteurs du premier degré;

dans L_0, le facteur $(t-x_0)$ n'apparaît pas;

dans L_1, le facteur $(t-x_1)$ n'apparaît pas;

...

dans L_{n-1}, le facteur $(t-x_{n-1})$ n'apparaît pas;

Dans L_0, pour $t = x_0$, le <u>dénominateur</u> est égal au numérateur et ainsi $L_0(x_0) = 1$;

Dans L_1, pour $t = x_1$, le dénominateur est égal au numérateur et ainsi $L_1(x_1) = 1$;

...

Dans L_{n-1}, pour $t = x_{n-1}$, le dénominateur est égal au numérateur et ainsi $L_{n-1}(x_{n-1}) = 1$.

Propriétés de la base de Lagrange

Les polynômes de Lagrange sont des polynômes de degré (n – 1) qui vérifient les conditions

$$\begin{array}{ll}
L_0(x_0)=1,\ L_0(x_1)=0,\ L_0(x_2)=0,\ \ldots, & L_0(x_{n-1})=0 \\
L_1(x_0)=0,\ L_1(x_1)=1,\ L_1(x_2)=0,\ \ldots, & L_1(x_{n-1})=0 \\
L_2(x_0)=0,\ L_2(x_1)=0,\ L_2(x_2)=1,\ L_2(x_3)=0\ \ldots, & L_2(x_{n-1})=0 \\
\ldots & \\
L_{n-1}(x_0)=0,\ L_{n-1}(x_1)=0,\ L_{n-1}(x_2)=0,\ \ldots, L_{n-1}(x_{n-2})=0, & L_{n-1}(x_{n-1})=1
\end{array}$$

Voir exercice 2.1 - 2

Solution du problème d'interpolation exprimée avec la base de Lagrange

La base de Lagrange permet d'écrire explicitement et sans calcul la solution du problème d'interpolation 1-1 (voir § 1.1)

$$g(t)=y_0\,L_0(t)+y_1\,L_1(t)+\ldots+\ y_{n-1}\,L_{n-1}(t)$$

Expression de la base de Lagrange en *Mathematica*

```
x = {1, 2, 3}; y = {3, 5, -1};
```

```
n = Length[x];
    longueur
```

```
Clear[b, t, L, g]
efface
```

$$\texttt{b[t\_] = Table}\left[\frac{\texttt{Apply[Times, Delete[t - x, i]]}}{\texttt{Apply[Times, Delete[x[[i]] - x, i]]}}, \texttt{\{i, 1, n\}}\right]$$
table

$$\left\{\frac{1}{2}(-3+t)(-2+t),\ -(-3+t)(-1+t),\ \frac{1}{2}(-2+t)(-1+t)\right\}$$

```
L[i_Integer][t_] := b[t][[i + 1]]
  dans
```

```
L[2][t]
```

$$\frac{1}{2}(-2+t)(-1+t)$$

```
g[t_] = y.b[t]
```

$$\frac{3}{2}(-3+t)(-2+t)-5(-3+t)(-1+t)-\frac{1}{2}(-2+t)(-1+t)$$

Exercice 2.1 - 1 [sans ordinateur]

Déterminez le polynôme de degré ≤ 3 qui passe par les quatre points suivants

$$M_0(-1,2),\ M_1(1,-1),\ M_2(2,3),\ M_3(5,-7)$$

Prescription d'exercice : écrivez le polynôme cherché comme combinaison linéaire des polynômes de la base de Lagrange.

Exercice 2.1 - 2

A propos du problème d'interpolation 1-1, dans le cas où les fonctions de base sont les polynômes de Lagrange, démontrez que

a) la matrice d'interpolation est l'identité (c'est-à-dire la matrice est diagonale et tous les termes diagonaux valent 1);

b) la solution du problème est

$$g(t) = y_0 L_0(t) + y_1 L_1(t) + \ldots + y_{n-1} L_{n-1}(t)$$

Exercice 2.1 - 3 [avec *Mathematica*]

Pour $n = 7$ et les abscisses $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, faites les graphiques des 4 derniers éléments de la base de Lagrange L_3, L_4, L_5, L_6.

Exercice 2.1 - 4 [facultatif] [Sans ordinateur]

On donne les abscisses

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0.25; \quad x_2 = 0.5; \quad x_3 = 0.75; \quad x_4 = 1;$$

les ordonnées correspondantes sont dénommées y_0, y_1, y_2, y_3, y_4. On considère la fonction d'interpolation linéaire par morceaux $g(t)$ qui passe par ces 5 points. Pour exprimer $g(t)$, on veut construire les 5 fonctions de base $b_0(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$, $b_4(t)$ qui vérifient les conditions

$$\text{pour} \quad i = 0, \ldots, 4, \quad \text{on a} \quad b_i(x_i) = 1;$$

$$\text{pour} \quad i \neq j, \quad \text{on a} \quad b_i(x_j) = 0$$

a) Dessinez les 5 fonctions de base.

b) Ecrivez explicitement, au moyen d'une formule, chaque fonction de base.

c) Appliquez les formules au calcul de

$$g(0.6) = y_0 b_0(0.6) + y_1 b_1(0.6) + y_2 b_2(0.6) + y_3 b_3(0.6) + y_4 b_4(0.6)$$

§ 2.2 Interpolation orthogonale [facultatif]

Exemple introductif

Déterminer une fonction périodique de période 2π qui passe par les trois points suivants

$$P_0(0; 0), \quad P_1\left(\frac{2\pi}{3}; -2\right), \quad P_2\left(\frac{4\pi}{3}; 3\right)$$

en faisant appel aux fonctions de base suivantes

$$b_0 = 1, \quad b_1(t) = \cos(t), \quad b_2(t) = \sin(t)$$

Première méthode: utilisons la méthode d'interpolation définie dans le § 1

```
Clear[b, t]; x = {0, 2π/3, 4π/3};
efface
```

```
b[t_] = {1, Cos[t], Sin[t]};
         cosinus  sinus
m = Map[b, x];
    applique
MatrixForm[m]
apparence matricielle
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice qui n'est pas triangulaire. Si on résoud le système au moyen d'une méthode générale (telle que la réduction à la forme triangulaire), le travail de résolution croît rapidement avec *n*. Une méthode plus efficace est souhaitée.

<u>Deuxième méthode</u>: montrons d'abord que les vecteurs-colonnes de la matrice sont orthogonaux 2 à 2; rappelons que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

On peut tirer profit de cette propriété pour résoudre le système. Ecrivons d'abord le système d'équations sous forme vectorielle

$$c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

puis multiplions les deux membres de l'équation par le premier vecteur-colonne

$$\left(c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_0 = \frac{\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} = \frac{0-2+3}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

procédons d'une manière analogue avec le deuxième vecteur-colonne

$$\left(c_0 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_0 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_1 = \frac{\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}} = \frac{0+1-\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}$$

puis avec le troisième vecteur-colonne

$$\left(c_0 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_0 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_2 \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_2 = \frac{\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}} = \frac{0-\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

La solution du problème est donc

$$g(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos(t) - \frac{5}{\sqrt{3}}\sin(t)$$

Dès que la méthode précédente est rodée, elle réclame beaucoup moins de calculs que la méthode générale pour résoudre les systèmes linéaires.

Généralisation et définition

Nous utilisons les notations du § 1.3. Les vecteurs-colonnes de la matrice sont

$$\overrightarrow{e_0} = \begin{pmatrix} b_0(x_0) \\ b_0(x_1) \\ \dots \\ b_0(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} b_1(x_0) \\ b_1(x_1) \\ \dots \\ b_1(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_{n-1}} = \begin{pmatrix} b_{n-1}(x_0) \\ b_{n-1}(x_1) \\ \dots \\ b_{n-1}(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Ecrivons le système à résoudre sous forme vectorielle

$$c_0\,\overrightarrow{e_0} + c_1\,\overrightarrow{e_1} + \dots + c_{n-1}\,\overrightarrow{e_{n-1}} = \vec{y}$$

L'interpolation est dite orthogonale si et seulement si la matrice du système linéaire est orthogonale, c'est-à-dire si les vecteurs-colonnes sont orthogonaux deux à deux:

$$\overrightarrow{e_j}\cdot\overrightarrow{e_k} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k$$

Montrons que, dans ce cas, l'équation vectorielle peut être résolue avec peu de calculs.
Multiplions les deux membres de l'équation par $\overrightarrow{e_k}$

$$\left(c_0\,\overrightarrow{e_0} + c_1\,\overrightarrow{e_1} + \dots + c_{n-1}\,\overrightarrow{e_{n-1}}\right)\cdot\overrightarrow{e_k} = \vec{y}\cdot\overrightarrow{e_k}$$

$$c_0\,\overrightarrow{e_0}\cdot\overrightarrow{e_k} + c_1\,\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_k} + \dots + c_{n-1}\,\overrightarrow{e_{n-1}}\cdot\overrightarrow{e_k} = \vec{y}\cdot\overrightarrow{e_k}$$

$$c_k\,\overrightarrow{e_k}\cdot\overrightarrow{e_k} = \vec{y}\cdot\overrightarrow{e_k}$$

On peut donc écrire explicitement la solution

$$\boxed{c_k = \frac{\vec{y}\cdot\overrightarrow{e_k}}{\overrightarrow{e_k}\cdot\overrightarrow{e_k}}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1}$$

<u>Calcul avec *Mathematica*</u>

```
x = {0, 2π/3, 4π/3}; n = Length[x]
                       longueur
```

3

```
y = {0, -2, 3}; Clear[b, t, g];
                efface
```

```
b[t_] = {1, Cos[t], Sin[t]};
            cosinus  sinus
```

```
m = Map[b, x]; MatrixForm[m]
    applique   apparence matriciel
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

```
e = Transpose[m];
    transposée
```

```
e[[1]].e[[2]]
```

0

$$c = \text{Table}\left[\frac{y.e[[k]]}{e[[k]].e[[k]]}, \{k, 1, n\}\right]$$

table

$$\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right\}$$

```
g[t_] = c.b[t]
```

$$\frac{1}{3} - \frac{\text{Cos}[t]}{3} - \frac{5\,\text{Sin}[t]}{\sqrt{3}}$$

Interpolation diagonale et interpolation orthogonale

Proposition

Toute interpolation diagonale est orthogonale.

En particulier, la base de Lagrange est orthogonale.

Démonstration

Dans une matrice diagonale, les vecteurs-colonnes sont orthogonaux. Pour le comprendre, prenons un exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Réciproque

L'exemple donné sous *Interpolation orthogonale, Exemple introductif* prouve qu'il existe des problèmes d'interpolation dont la matrice est orthogonale mais pas diagonale.

Interpolation trigonométrique orthogonale

Fonctions de base pour l'interpolation trigonométrique

Considérons maintenant n fonctions périodiques $\{b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ de période T. En posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$, choisissons n fonctions de base

$$\begin{gathered} b_0(t) = 1, \\ b_1(t) = \cos(\omega t),\ b_2(t) = \sin(\omega t), \\ b_3(t) = \cos(2\omega t),\ b_4(t) = \sin(2\omega t), \\ b_5(t) = \cos(3\omega t),\ b_6(t) = \sin(3\omega t), \\ b_7(t) = \cos(4\omega t),\ \ldots, \\ b_{n-1}(t) = \cdots \end{gathered}$$

En d'autres termes,

$$b_0(t) = 1,\quad b_k(t) = \begin{cases} \cos\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)\omega\, t\right) & \text{si } k \text{ est impair} \\ \sin\left(\frac{k}{2}\,\omega\, t\right) & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases},\quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Abscisses d'échantillonnage

Les abscisses sont réparties uniformément sur l'intervalle $[0,\ T]$; plus précisément, nous choisissons

$$x_j = j\,\frac{T}{n},\qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Théorème 2 - 2

Avec les choix précédents, l'interpolation trigonométrique est orthogonale. Plus précisément, avec les notations du § 1.3,

$$\vec{e_j}.\vec{e_k} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k \quad \text{et}$$

$$\text{si } n \text{ est impair :}\quad \vec{e_k}.\vec{e_k} = \begin{cases} n & \text{pour } k = 0 \\ \frac{n}{2} & \text{pour } k = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

$$\text{si } n \text{ est pair :}\quad \vec{e_k}.\vec{e_k} = \begin{cases} n & \text{pour } k = 0 \text{ ou } k = n-1 \\ \frac{n}{2} & \text{pour } k = 1, \ldots, n-2 \end{cases}$$

Corollaire

La fonction d'interpolation

$$g(t) = c_0\, b_0(t) + c_1\, b_1(t) + \ldots + c_{n-1}\, b_{n-1}(t)$$

dont les coefficients

$$c_k = \frac{\vec{y}.\vec{e_k}}{\vec{e_k}.\vec{e_k}}\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

sont appelés *coefficients de Fourier*, est périodique de période T et passe par les n points prescrits

$$g(x_0) = y_0,\ g(x_1) = y_1,\ \ldots,\ g(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

La famille orthogonale des fonctions de base [facultatif]

A propos de l'interpolation orthogonale, les mathématiciens disent que les fonctions de base forment une famille orthogonale. Pour le justifier, ils munissent l'espace vectoriel des fonctions d'interpolation

$$g = c_0\, b_0 + c_1\, b_1 + \ldots + c_{n-1}\, b_{n-1}$$

du produit scalaire suivant

$$\langle f \mid g \rangle = f(x_0)\, g(x_0) + f(x_1)\, g(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\, g(x_{n-1})$$

par rapport auquel les fonctions de base sont orthogonales. En effet, pour $j \neq k$,

$$\langle b_j \mid b_k \rangle = b_j(x_0)\, b_k(x_0) + b_j(x_1)\, b_k(x_1) + \ldots + b_j(x_{n-1})\, b_k(x_{n-1}) =$$

$$\begin{pmatrix} b_j(x_0) \\ b_j(x_1) \\ \ldots \\ b_j(x_{n-1}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_k(x_0) \\ b_k(x_1) \\ \ldots \\ b_k(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \vec{e_j}.\vec{e_k} = 0$$

Les fonctions de base et les colonnes de la matrice d'interpolation sont en correspondance biunivoque; c'est pourquoi on peut attribuer aux b_j les propriétés que l'on observe sur les $\vec{e_j}$. Ainsi, l'interpolation est orthogonale si et seulement si les fonctions de base forment une famille orthogonale.

Exercice 2.2 - 1 [facultatif]

[Avec *Mathematica*] Montrez que l'interpolation trigonométrique donnée en exemple dans le § 1.2 n'est pas orthogonale.

[Sans ordinateur] Expliquez en quoi les hypothèses du théorème 2-2 ne sont pas remplies.

Exercice 2.2 - 2 [facultatif] [Avec *Mathematica*]

Dans la région de Zurich, la température moyenne mensuelle en degrés Celsius est la suivante:

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
-1	1	4	8	12	15	18	17	14	9	4	1

a) Construisez une fonction d'interpolation pour ces températures (voir les indications ci-dessous).

b) Comparez
   1) la température moyenne annuelle et
   2) c_0 = le coefficient de la première fonction de base.
   Expliquez vos observations.

c) On veut diviser l'année en deux parties égales: une "saison froide" et une "saison chaude". Pour ce faire, calculez les dates auxquelles la température moyenne journalière est égale à la température moyenne annuelle.
   Comparez avec les dates des équinoxes. Commentez les résultats obtenus.

Indications pour la question a)

1) Puisqu'il y a 12 points donnés, nous prenons 12 fonctions de base;
   la liste des fonctions de base est donnée dans la théorie : 1, $\cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{365}t\right)$, ...

2) pour bénéficier de l'orthogonalité, choisissons les abscisses comme indiqué dans les hypothèses du théorème 2-2

```
x = Range[0, 360, 365/12]
```
plage

$$\left\{0, \frac{365}{12}, \frac{365}{6}, \frac{365}{4}, \frac{365}{3}, \frac{1825}{12}, \frac{365}{2}, \frac{2555}{12}, \frac{730}{3}, \frac{1095}{4}, \frac{1825}{6}, \frac{4015}{12}\right\}$$

ce qui nous donne les points d'interpolation suivants

```
y = {-1, 1, 4, 8, 12, 15, 18, 17, 14, 9, 4, 1};
```

t [d]	0	$\frac{365}{12}$	$\frac{365}{6}$	$\frac{365}{4}$	$\frac{365}{3}$	$\frac{1825}{12}$	$\frac{365}{2}$	$\frac{2555}{12}$	$\frac{730}{3}$	$\frac{1095}{4}$	$\frac{1825}{6}$	$\frac{4015}{12}$
y [°C]	-1	1	4	8	12	15	18	17	14	9	4	1

3) pour interpréter les résultats du calcul, on se réfère au tableau suivant; il s'agit d'une numérotation des jours de l'année qui vérifie les hypothèses du théorème 2-2.
Par rapport au tableau du § 1.2, la numérotation est décalée de 15 jours:
le 16 janvier porte le numéro 0 au lieu de porter le numéro 15.

```
xr = Round[x]
     arrondis
```

```
{0, 30, 61, 91, 122, 152, 182, 213, 243, 274, 304, 335}
```

16 janvier	0
15 février	30
18 mars	61
17 avril	91
18 mai	122
17 juin	152
17 juillet	182
17 août	213
16 septembre	243
17 octobre	274
16 novembre	304
17 décembre	335

Exercice 2.2 - 3 [facultatif] [Avec *Mathematica*]

Démontrez que la fonction

$$f(t) = 3\cos^4(t) - 5\sin^3(t)$$

peut être mise sous la forme

$$f(t) = c_0 + c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) + c_5 \cos(3t) + c_6 \sin(3t) + c_7 \cos(4t) + c_8 \sin(4t)$$

<u>Indications</u>

1) Échantillonnez la fonction $f(t)$ en 9 points comme indiqué dans le théorème 2-2.

2) Posez le problème d'interpolation avec les fonctions de base données.
Vérifiez que la matrice d'interpolation est orthogonale.
Calculez les coefficients.

3) En notant $g(t)$ la fonction d'interpolation, vérifiez que $g(t) - f(t) = 0$ pour tout t.

Prolongements

Le lecteur intéressé est invité à comparer le thème de l'*interpolation trigonométrique* à celui de l'*ajustement trigonométrique au sens des moindres carrés.* Pour ce faire, consultez
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/ajustements/3_ajust.pdf

Liens

Vers les corrigés des exercices: § 2 Interpolation orthogonale
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/interpolation/2-interpolation-cor.pdf

Vers la page mère : Applications des mathématiques
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html