Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Systèmes d'équations linéaires § 1 Systèmes réguliers
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/systemes_lineaires/1-syslin_reg.pdf

Corrigé de l'exercice 1-1- P 1

Soit x l'avoir du premier,
y l'avoir du deuxième et
z l'avoir du troisième.

On peut poser un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$x + \frac{1}{2} y = 3\,000\,000$$
$$y + \frac{1}{3} x = 3\,000\,000$$
$$z + \frac{1}{4} x = 3\,000\,000$$

<u>Attention:</u> les avoirs cumulés des trois personnes permettent d'acheter le terrain:
$x + y + z \geq 3\,000\,000$ (il ne s'agit pas d'une égalité!)

Corrigé de l'exercice 1-1- P 2

Soit x la masse à extraire du premier lingot,
y la masse à extraire du deuxième lingot et
z la masse à extraire du troisième lingot.

On peut poser un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\frac{20}{90} x + \frac{30}{120} y + \frac{40}{180} z = 34$$
$$\frac{30}{90} x + \frac{40}{120} y + \frac{50}{180} z = 46$$
$$\frac{40}{90} x + \frac{50}{120} y + \frac{90}{180} z = 67$$

A ces équations, il faut rajouter les 6 inéquations suivantes:

$$0 \leq x \leq 90$$
$$0 \leq y \leq 120$$
$$0 \leq z \leq 180$$

Corrigé de l'exercice 1-1- P 3

Soit x la longueur de terrain plat,
y la longueur de montée et
z la longueur de descente de A vers B.

On peut poser un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\frac{x}{25} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30} = 4 + \frac{24}{60}$$
$$\frac{x}{25} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15} = 4 + \frac{36}{60}$$
$$x + y + z = 100$$

Corrigé de l'exercice 1-1- P 4

Il s'agit d'un système de quatre équations à quatre inconnues

$$a_0 = 2$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 5$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -1$$
$$a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2 + 8\,a_3 = -3$$

Corrigé de l'exercice 1-1- P 5

Il s'agit d'un système de cinq équations à cinq inconnues:

$$a_0 = -1$$
$$a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2 + 8\,a_3 + 16\,a_4 = 3$$
$$a_0 + 3\,a_1 + 9\,a_2 + 27\,a_3 + 81\,a_4 = 1$$
$$a_0 + 4\,a_1 + 16\,a_2 + 64\,a_3 + 256\,a_4 = 6$$
$$a_0 + 5\,a_1 + 25\,a_2 + 125\,a_3 + 625\,a_4 = -2$$

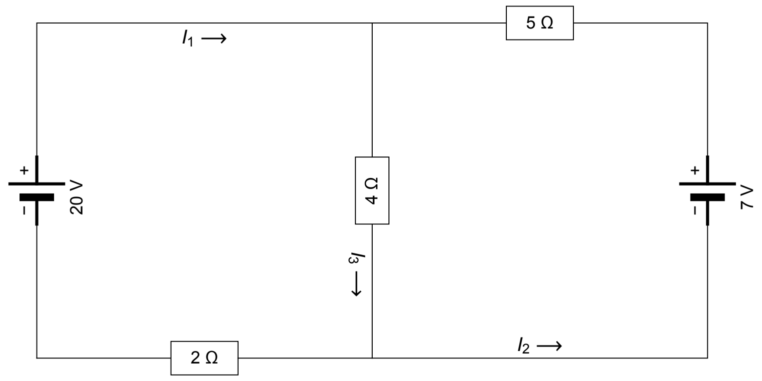
Corrigé de l'exercice 1-1- P 6

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues

$$y = x^2 - x$$
$$y = \frac{4}{x}$$

Corrigé de l'exercice 1-1- P 7

Le circuit comporte trois courants inconnus. Orientons les courants comme suit :



Pour le noeud situé en haut au milieu

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Orientons toutes les boucles selon le sens direct.

Pour la boucle de gauche,

$$-20\,\mathrm{V} = -2\,\Omega\, I_1 - 4\,\Omega\, I_3$$

Pour la boucle de droite,

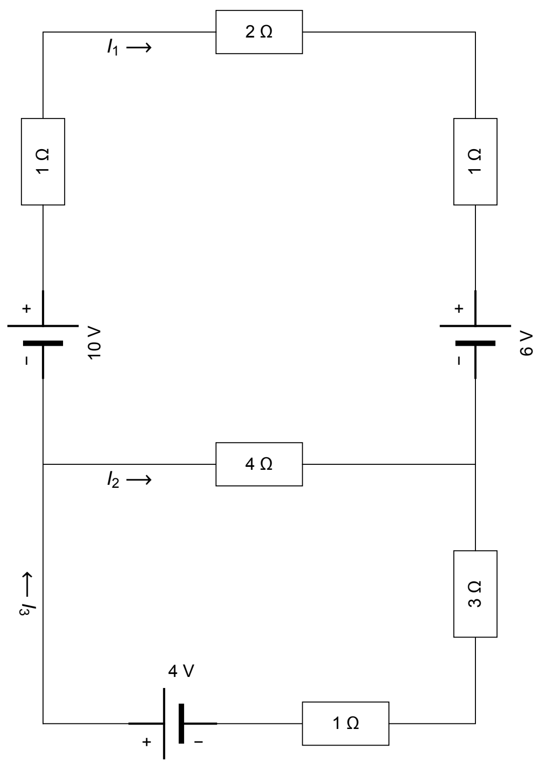
$$7\,\mathrm{V} = 5\,\Omega\, I_2 + 4\,\Omega\, I_3$$

On a ainsi obtenu un système de 3 équations à 3 inconnues.

Systèmes d'équations linéaires

Corrigé de l'exercice 1-1- P 8

Le circuit comporte trois courants inconnus. Orientons les courants comme suit



Pour le noeud situé à gauche à mi-hauteur, on a

$$I_3 = I_1 + I_2$$

Orientons les boucles dans le sens direct. Pour la boucle du haut, on a

$$6\,\mathrm{V} - 10\,\mathrm{V} = -1\,\Omega\,I_1 - 2\,\Omega\,I_1 - 1\,\Omega\,I_1 + 4\,\Omega\,I_2$$

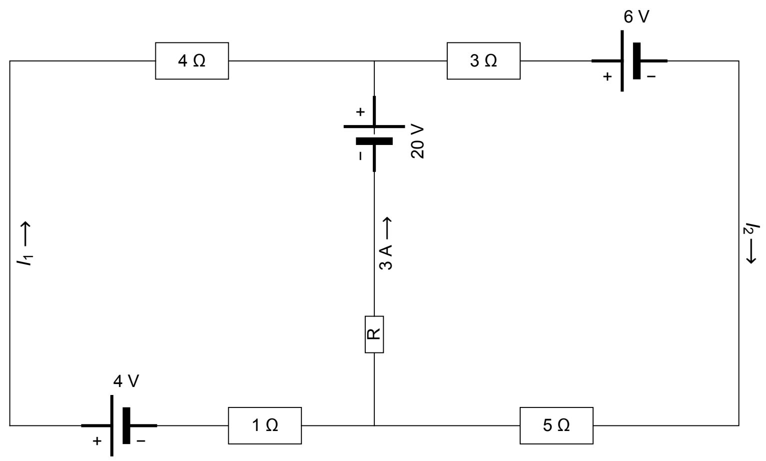
Pour la boucle du bas

$$-4\,\mathrm{V} = -1\,\Omega\,I_3 - 3\,\Omega\,I_3 - 4\,\Omega\,I_2$$

On a obtenu un système de 3 équations à 3 inconnues.

Corrigé de l'exercice 1-1- P 9

Même si on ne nous demande que la valeur de R, le circuit comporte <u>trois inconnues</u>: la résistance R et les courants I_1, I_2. Orientons les courants comme suit



Pour le noeud situé au milieu en haut, on a

$$I_1 + 3\,A = I_2$$

Orientons les boucles dans le sens direct. Pour la boucle de gauche, on a

$$-4\,V + 20\,V = -4\,\Omega\, I_1 - 1\,\Omega\, I_1 + R\,(3\,A)$$

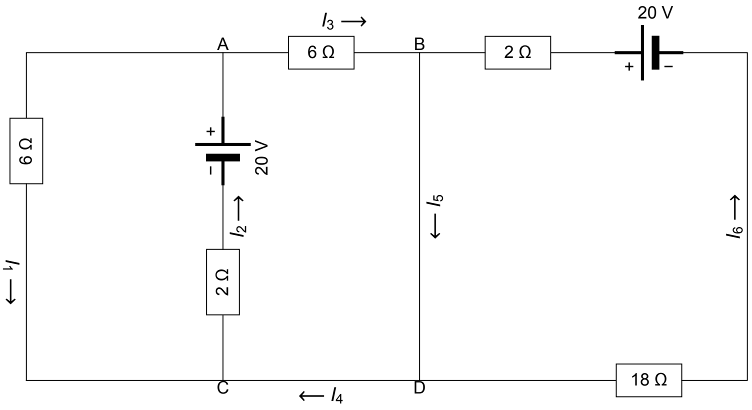
Pour la boucle de droite

$$6\,V - 20\,V = -5\,\Omega\, I_2 - 3\,\Omega\, I_2 - R\,(3\,A)$$

On a obtenu un système de 3 équations à 3 inconnues.

Corrigé de l'exercice 1-1- P 10

Le circuit comporte six courants inconnus. Orientons les courants comme suit



Au noeud A, on a

$$I_2 = I_1 + I_3$$

Au noeud B, on a

$$I_3 + I_6 = I_5$$

Au noeud C, on a

$$I_1 + I_4 = I_2$$

La relation pour le noeud D se déduit des trois autres.

Orientons les boucles selon le sens direct. Pour la petite boucle de gauche,

$$20\,\text{V} = 6\,\Omega\, I_1 + 2\,\Omega\, I_2$$

Pour la boucle ACDBA,

$$-20\,\text{V} = -2\,\Omega\, I_2 - 6\,\Omega\, I_3$$

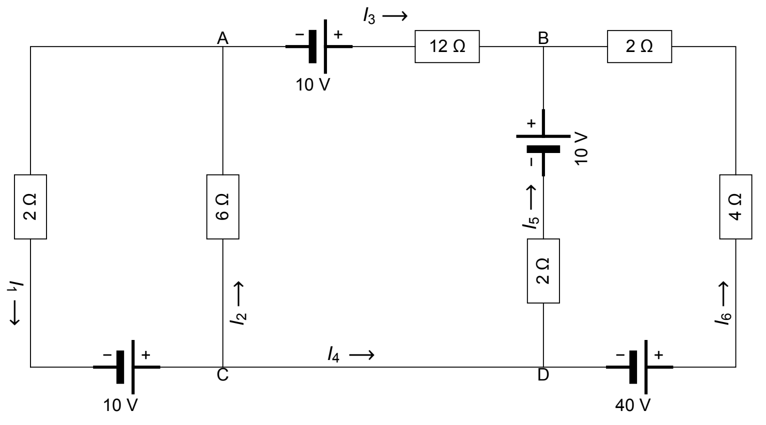
Pour la petite boucle de droite

$$20\,\text{V} = 18\,\Omega\, I_6 + 2\,\Omega\, I_6$$

On a obtenu un système de 6 équations à 6 inconnues.

Corrigé de l'exercice 1-1- P 11

Il y a six courants inconnus. Orientons les courants comme indiqués par la figure.



Au noeud A, on a

$$I_2 = I_1 + I_3$$

Au noeud B,

$$I_3 + I_5 + I_6 = 0$$

Au noeud C,

$$I_1 = I_2 + I_4$$

L'équation pour le noeud D se déduit des trois équations précédentes.

Orientons les boucles dans le sens direct. Pour la petite boucle de gauche,

$$10\,\mathrm{V} = 2\,\Omega\, I_1 + 6\,\Omega\, I_2$$

Pour la boucle ACDBA,

$$10\,\mathrm{V} - 10\,\mathrm{V} = -6\,\Omega\, I_2 - 12\,\Omega\, I_3 + 2\,\Omega\, I_5$$

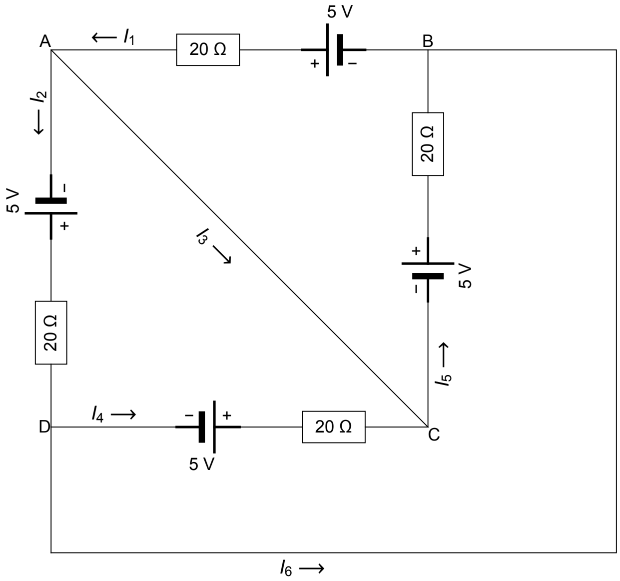
Pour la petite boucle de droite,

$$-10\,\mathrm{V} + 40\,\mathrm{V} = -2\,\Omega\, I_5 + 4\,\Omega\, I_6 + 2\,\Omega\, I_6$$

On a obtenu un système de 6 équations à 6 inconnues.

Corrigé de l'exercice 1-1- P 12

Il y a six courants inconnus. Orientons les courants comme indiqué dans la figure.



Pour le noeud A,

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Pour le noeud B,

$$I_5 + I_6 = I_1$$

Pour le noeud C,

$$I_3 + I_4 = I_5$$

L'équation pour le noeud D se déduit des trois équations précédentes.

Orientons toutes les boucles dans le sens direct. Pour la boucle ACBA, on a

$$5\,\mathrm{V} + 5\,\mathrm{V} = 20\,\Omega\, I_1 + 20\,\Omega\, I_5$$

Pour la boucle ADCA,

$$5\,\mathrm{V} + 5\,\mathrm{V} = 20\,\Omega\, I_2 + 20\,\Omega\, I_4$$

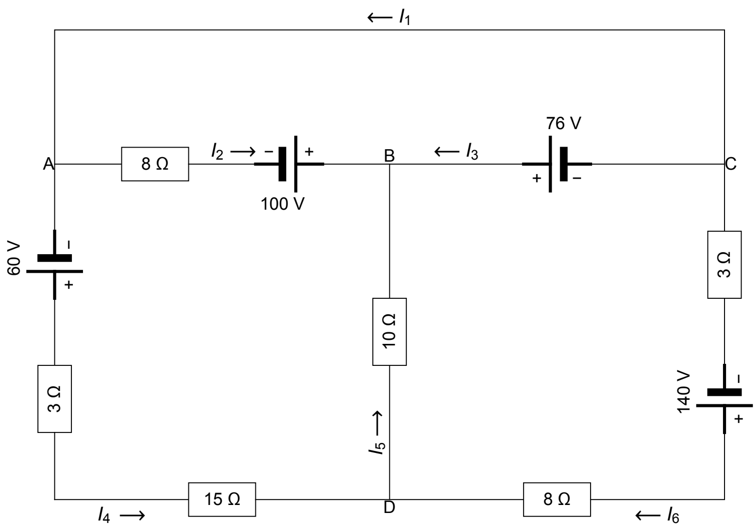
Pour la grande boucle extérieure,

$$5\,\mathrm{V} + 5\,\mathrm{V} = 20\,\Omega\, I_1 + 20\,\Omega\, I_2$$

On a obtenu un système de 6 équations à 6 inconnues.

Corrigé de l'exercice 1-1- P 13

Il y a six courants à déterminer. Orientons les courants selon la figure suivante:



Au noeud A, on a

$$I_1 = I_2 + I_4$$

Au noeud B,

$$I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

Au noeud C,

$$0 = I_1 + I_3 + I_6$$

Pour le noeud D, la relation se déduit des trois autres.

Orientons toutes les boucles dans le sens direct. Pour la petite boucle du haut,

$$100\,\text{V} - 76\,\text{V} = 8\,\Omega\,I_2$$

Pour la petite boucle en bas à gauche,

$$-100\,\text{V} + 60\,\text{V} = -8\,\Omega\,I_2 + 3\,\Omega\,I_4 + 15\,\Omega\,I_4 + 10\,\Omega\,I_5$$

Pour la petite boucle en bas à droite,

$$-140\,\text{V} + 76\,\text{V} = -10\,\Omega\,I_5 - 8\,\Omega\,I_6 - 3\,\Omega\,I_6$$

On a obtenu un système de 6 équations à 6 inconnues.

Corrigé de l'exercice 1-2- P 1

Écrivons le système sous la forme générale puis effectuons l'élimination dans la première colonne :

$$\begin{array}{cccccl|c|c|}
x & +\frac{1}{2}\,y & & = & \text{3'000'000} & -1 & -1 \\
\boxed{\frac{1}{3}\,x} & +\,y & & = & \text{3'000'000} & \longleftarrow 3 & \\
\boxed{\frac{1}{4}\,x} & & +\,z & = & \text{3'000'000} & & \longleftarrow 4
\end{array}$$

Éliminons dans la deuxième colonne:

$$\begin{array}{cccccl|c|}
x & +\frac{1}{2}\,y & & = & \text{3'000'000} & \\
 & \frac{5}{2}\,y & & = & \text{6'000'000} & 1 \\
 & \boxed{-\frac{1}{2}\,y} & +\,4\,z & = & \text{9'000'000} & \longleftarrow 5
\end{array}$$

On obtient un système triangulaire régulier

$$\begin{array}{cccc}
x & +\frac{1}{2}\,y & & = & \text{3'000'000} \\
 & \frac{5}{2}\,y & & = & \text{6'000'000} \\
 & & 20\,z & = & \text{51'000'000}
\end{array}$$

d'où on tire:

$$\begin{aligned}
z &= \text{2'550'000} \\
y &= \text{2'400'000} \\
x &= \text{1'800'000}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1-2- P 2

Ecrivons le système sous la forme générale :

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{2}{9}\,x & +\frac{1}{4}\,y & +\frac{2}{9}\,z & = & 34 \\
\frac{1}{3}\,x & +\frac{1}{3}\,y & +\frac{5}{18}\,z & = & 46 \\
\frac{4}{9}\,x & \frac{5}{12}\,y & +\frac{1}{2}\,z & = & 67
\end{array}$$

Eliminons dans la première colonne:

$$\begin{array}{cccccl|c|c|}
\frac{2}{9}\,x & +\frac{1}{4}\,y & +\frac{2}{9}\,z & = & 34 & -3 & -2 \\
\boxed{\frac{1}{3}\,x} & +\frac{1}{3}\,y & +\frac{5}{18}\,z & = & 46 & \longleftarrow 2 & \\
\boxed{\frac{4}{9}\,x} & +\frac{5}{12}\,y & +\frac{1}{2}\,z & = & 67 & & \longleftarrow 1
\end{array}$$

Eliminons dans la deuxième colonne :

$$\begin{array}{rrrrrl|l|}
\frac{2}{9}x & +\frac{1}{4}y & +\frac{2}{9}z & = & 34 & & \\
 & -\frac{1}{12}y & -\frac{1}{9}z & = & -10 & -1 & \\
 & \boxed{-\frac{1}{12}y} & +\frac{1}{18}z & = & -1 & \longleftarrow 1 &
\end{array}$$

On obtient un système triangulaire régulier

$$\begin{array}{rrrl}
\frac{2}{9}x & +\frac{1}{4}y & +\frac{2}{9}z & = 34 \\
 & -\frac{1}{12}y & -\frac{1}{9}z & = -10 \\
 & & \frac{1}{6}z & = 9
\end{array}$$

dont la solution est :

$$z = 54, \quad y = 48, \quad x = 45$$

Les inéquations sont vérifiées :

$$0 \le x \le 90, \quad 0 \le y \le 120, \quad 0 \le z \le 180$$

Corrigé de l'exercice 1-2- P 5

Pour la forme générale, comme $a_0 = -1$, nous allons écrire un système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{array}{rrrrcr}
2a_1 & +4a_2 & +8a_3 & +16a_4 & = & 4 \\
3a_1 & +9a_2 & +27a_3 & +81a_4 & = & 2 \\
4a_1 & +16a_2 & +64a_3 & +256a_4 & = & 7 \\
5a_1 & +25a_2 & +125a_3 & +625a_4 & = & -1
\end{array}$$

Eliminons dans la première colonne :

$$\begin{array}{rrrrcr|l|l|l|}
2a_1 & +4a_2 & +8a_3 & +16a_4 & = & 4 & -3 & -2 & -5 \\
\boxed{3a_1} & +9a_2 & +27a_3 & +81a_4 & = & 2 & \longleftarrow 2 & & \\
\boxed{4a_1} & +16a_2 & +64a_3 & +256a_4 & = & 7 & & \longleftarrow 1 & \\
\boxed{5a_1} & +25a_2 & +125a_3 & +625a_4 & = & -1 & & & \longleftarrow 2
\end{array}$$

Eliminons dans la deuxième colonne :

$$\begin{array}{rrrrcr|l|l|}
2a_1 & +4a_2 & +8a_3 & +16a_4 & = & 4 & & \\
 & 6a_2 & +30a_3 & +114a_4 & = & -8 & -4 & -5 \\
 & \boxed{8a_2} & +48a_3 & +224a_4 & = & -1 & \longleftarrow 3 & \\
 & \boxed{30a_2} & +210a_3 & +1170a_4 & = & -22 & & \longleftarrow 1
\end{array}$$

Eliminons dans la troisième colonne :

$$\begin{array}{rrrrcr|l|}
2a_1 & +4a_2 & +8a_3 & +16a_4 & = & 4 & \\
 & 6a_2 & +30a_3 & +114a_4 & = & -8 & \\
 & & +24a_3 & +216a_4 & = & 29 & -5 \\
 & & \boxed{+60a_3} & +600a_4 & = & 18 & \longleftarrow 2
\end{array}$$

On obtient un système triangulaire régulier

$$\begin{array}{llllll}
2a_1 & +4a_2 & +8a_3 & +16a_4 & = & 4 \\
 & 6a_2 & +30a_3 & +114a_4 & = & -8 \\
 & & 24a_3 & +216a_4 & = & 29 \\
 & & & 120a_4 & = & -109
\end{array}$$

dont la solution est :

$$a_4 = -\frac{109}{120}, \quad a_3 = \frac{563}{60}, \quad a_2 = -\frac{3719}{120}, \quad a_1 = \frac{2023}{60}$$

Corrigé de l'exercice 1-2- P 6

$$\begin{array}{l} y = x^2 - x \\ y = \frac{4}{x} \end{array}$$

Le système n'est pas linéaire. Pour le résoudre, substituons y dans la deuxième équation

$$\begin{array}{l} y = x^2 - x \\ x^2 - x = \frac{4}{x} \end{array}$$

En transformant la dernière équation

$$\begin{array}{l} y = x^2 - x \\ x \neq 0 \\ x^3 - x^2 - 4 = 0 \end{array}$$

Une solution particulière de la dernière équation est x=2. Factorisons la dernière équation :

$$\begin{array}{l} y = x^2 - x \\ x \neq 0 \\ (x-2)\left(x^2+x+2\right) = 0 \end{array}$$

La dernière équation possède une et une seule solution x = 2.
Finalement, le système possède une et une seule solution $\{x, y\} = \{2, 2\}$.

Corrigé de l'exercice 1-2- P 10

Multiplions les trois dernières équations par $\frac{1}{\Omega}$ et utilisons la relation $\frac{1\,V}{1\,\Omega} = 1\,A$

$$\begin{array}{lllllll}
-I_1 & +I_2 & -I_3 & & & & = 0 \\
 & & I_3 & & -I_5 & +I_6 & = 0 \\
I_1 & -I_2 & & +I_4 & & & = 0 \\
6I_1 & +2I_2 & & & & & = 20\,A \\
 & -2I_2 & -6I_3 & & & & = -20\,A \\
 & & & & & 20I_6 & = 20\,A
\end{array}$$

Etape 1 pour systèmes creux

Sélectionnons une colonne parmi les plus creuses - ici la colonne 4 - et permutons-la avec la première colonne :

$$\begin{array}{lllllll}
 & I_2 & -I_3 & -I_1 & & & = 0 \\
 & & I_3 & & -I_5 & +I_6 & = 0 \\
I_4 & -I_2 & & +I_1 & & & = 0 \\
 & +2I_2 & & +6I_1 & & & = 20\,A \\
 & -2I_2 & -6I_3 & & & & = -20\,A \\
 & & & & & 20I_6 & = 20\,A
\end{array}$$

Pour choisir I_4 comme premier pivot, permutons les lignes 1 et 3 :

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
I_4 & -I_2 & & +I_1 & & & = & 0 \\
 & & I_3 & & -I_5 & +I_6 & = & 0 \\
 & +I_2 & -I_3 & -I_1 & & & = & 0 \\
 & +2\,I_2 & & +6\,I_1 & & & = & 20\text{ A} \\
 & -2\,I_2 & -6\,I_3 & & & & = & -20\text{ A} \\
 & & & & & 20\,I_6 & = & 20\text{ A}
\end{array}
$$

L'élimination dans la première colonne est terminée.

<u>Etape 2 pour systèmes creux</u>

Parmi les colonnes 2 à 6, sélectionnons une colonne dont la partie inférieure est parmi les plus creuses - ici la colonne 5 - et permutons-la avec la colonne 2 :

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
I_4 & & & +I_1 & -I_2 & & = & 0 \\
 & -I_5 & +I_3 & & & +I_6 & = & 0 \\
 & & -I_3 & -I_1 & +I_2 & & = & 0 \\
 & & & +6\,I_1 & +2\,I_2 & & = & 20\text{ A} \\
 & & -6\,I_3 & & -2\,I_2 & & = & -20\text{ A} \\
 & & & & & 20\,I_6 & = & 20\text{ A}
\end{array}
$$

L'élimination dans la colonne 2 est terminée.

<u>Etape 3</u>

Eliminons dans la colonne 3.

$$
\begin{array}{rrrrrrcl|l}
I_4 & & & +I_1 & -I_2 & & = & 0 & \\
 & -I_5 & +I_3 & & & +I_6 & = & 0 & \\
 & & -I_3 & -I_1 & +I_2 & & = & 0 & \quad 6 \\
 & & & +6\,I_1 & +2\,I_2 & & = & 20\text{ A} & \\
 & & \boxed{-6\,I_3} & & -2\,I_2 & & = & -20\text{ A} & \longleftarrow(-1) \\
 & & & & & 20\,I_6 & = & 20\text{ A} &
\end{array}
$$

On obtient :

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
I_4 & & & +I_1 & -I_2 & & = & 0 \\
 & -I_5 & +I_3 & & & +I_6 & = & 0 \\
 & & -I_3 & -I_1 & +I_2 & & = & 0 \\
 & & & +6\,I_1 & +2\,I_2 & & = & 20\text{ A} \\
 & & & -6\,I_1 & +8\,I_2 & & = & 20\text{ A} \\
 & & & & & 20\,I_6 & = & 20\text{ A}
\end{array}
$$

<u>Etape 4</u>

Adoptons $\boxed{6\,I_1}$ comme quatrième pivot et éliminons dans la colonne 4.

$$
\begin{array}{rrrrrrcl|l}
I_4 & & & +I_1 & -I_2 & & = & 0 & \\
 & -I_5 & +I_3 & & & +I_6 & = & 0 & \\
 & & -I_3 & -I_1 & +I_2 & & = & 0 & \\
 & & & +6\,I_1 & +2\,I_2 & & = & 20\text{ A} & \quad 1 \\
 & & & \boxed{-6\,I_1} & +8\,I_2 & & = & 20\text{ A} & \longleftarrow 1 \\
 & & & & & 20\,I_6 & = & 20\text{ A} &
\end{array}
$$

On obtient un système triangulaire régulier

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
I_4 & & & +I_1 & -I_2 & & = & 0 \\
 & -I_5 & +I_3 & & & +I_6 & = & 0 \\
 & & -I_3 & -I_1 & +I_2 & & = & 0 \\
 & & & +6\,I_1 & +2\,I_2 & & = & 20\text{ A} \\
 & & & & 10\,I_2 & & = & 40\text{ A} \\
 & & & & & 20\,I_6 & = & 20\text{ A}
\end{array}
$$

dont la solution est

$$I_6 = 1\,\text{A}, \quad I_2 = 4\,\text{A}, \quad I_1 = 2\,\text{A}, \quad I_3 = 2\,\text{A}, \quad I_5 = 3\,\text{A}, \quad I_4 = 2\,\text{A}$$

Interprétation:

Tous les courants circulent dans le sens indiqué sur la figure du corrigé 1-1-P 10.

Corrigé de l'exercice 1-2- P 11

Multiplions les trois dernières équations par $\frac{1}{\Omega}$ et utilisons la relation $\frac{1\,\text{V}}{1\,\Omega} = 1\,\text{A}$

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_1 & +I_2 & -I_3 & & & & = & 0 \\
 & & I_3 & & +I_5 & +I_6 & = & 0 \\
I_1 & -I_2 & & -I_4 & & & = & 0 \\
2\,I_1 & +6\,I_2 & & & & & = & 10\,\text{A} \\
 & -6\,I_2 & -12\,I_3 & & +2\,I_5 & & = & 0 \\
 & & & & -2\,I_5 & +6\,I_6 & = & 30\,\text{A}
\end{array}$$

<u>Etape 1 pour systèmes creux</u>

Sélectionnons une colonne parmi les plus creuses - ici la colonne 4 - et permutons-la avec la première colonne :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
 & I_2 & -I_3 & -I_1 & & & = & 0 \\
 & & I_3 & & +I_5 & +I_6 & = & 0 \\
-I_4 & -I_2 & & +I_1 & & & = & 0 \\
 & +6\,I_2 & & +2\,I_1 & & & = & 10\,\text{A} \\
 & -6\,I_2 & -12\,I_3 & & +2\,I_5 & & = & 0 \\
 & & & & -2\,I_5 & +6\,I_6 & = & 30\,\text{A}
\end{array}$$

Pour choisir $\boxed{-I_4}$ comme premier pivot, permutons les lignes 1 et 3 :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & -I_2 & & +I_1 & & & = & 0 \\
 & & I_3 & & +I_5 & +I_6 & = & 0 \\
 & I_2 & -I_3 & -I_1 & & & = & 0 \\
 & +6\,I_2 & & +2\,I_1 & & & = & 10\,\text{A} \\
 & -6\,I_2 & -12\,I_3 & & +2\,I_5 & & = & 0 \\
 & & & & -2\,I_5 & +6\,I_6 & = & 30\,\text{A}
\end{array}$$

L'élimination dans la première colonne est terminée.

<u>Etape 2 pour systèmes creux</u>

Parmi les colonnes 2 à 6, sélectionnons une colonne dont la partie inférieure est parmi les plus creuses - ici la colonne 6 - et permutons-la avec la colonne 2 :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & & & +I_1 & & -I_2 & = & 0 \\
 & I_6 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\
 & & -I_3 & -I_1 & & +I_2 & = & 0 \\
 & & & +2\,I_1 & & +6\,I_2 & = & 10\,\text{A} \\
 & & -12\,I_3 & & +2\,I_5 & -6\,I_2 & = & 0 \\
 & 6\,I_6 & & & -2\,I_5 & & = & 30\,\text{A}
\end{array}$$

Adoptons $\boxed{I_6}$ comme deuxième pivot et éliminons dans la colonne 2 :

$$\begin{array}{rrrrrrcl|l}
-I_4 & & & +I_1 & & -I_2 & = & 0 & \\
 & I_6 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 & \quad 6 \\
 & & -I_3 & -I_1 & & +I_2 & = & 0 & \\
 & & & +2\,I_1 & & +6\,I_2 & = & 10\,\text{A} & \\
 & & -12\,I_3 & & +2\,I_5 & -6\,I_2 & = & 0 & \\
 & \boxed{6\,I_6} & & & -2\,I_5 & & = & 30\,\text{A} & \longleftarrow (-1)
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & & & +I_1 & & -I_2 & = & 0 \\
 & I_6 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\
 & & -I_3 & -I_1 & & +I_2 & = & 0 \\
 & & & +2\,I_1 & & +6\,I_2 & = & 10\,A \\
 & & -12\,I_3 & & +2\,I_5 & -6\,I_2 & = & 0 \\
 & & 6\,I_3 & & +8\,I_5 & & = & -30\,A
\end{array}$$

<u>Etape 3 pour systèmes creux</u>

Parmi les colonnes 3 à 6, sélectionnons une colonne dont la partie inférieure est parmi les plus creuses - ici la colonne 4 - et permutons-la avec la colonne 3 :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & & +I_1 & & & -I_2 & = & 0 \\
 & I_6 & & +I_3 & +I_5 & & = & 0 \\
 & & -I_1 & -I_3 & & +I_2 & = & 0 \\
 & & 2\,I_1 & & & +6\,I_2 & = & 10\,A \\
 & & & -12\,I_3 & +2\,I_5 & -6\,I_2 & = & 0 \\
 & & & 6\,I_3 & +8\,I_5 & & = & -30\,A
\end{array}$$

Adoptons $\boxed{-I_1}$ comme troisième pivot et éliminons dans la colonne 3 :

$$\begin{array}{rrrrrrcll}
-I_4 & & +I_1 & & & -I_2 & = & 0 & | \\
 & I_6 & & +I_3 & +I_5 & & = & 0 & | \\
 & & -I_1 & -I_3 & & +I_2 & = & 0 & | \quad 2 \\
 & & \boxed{2\,I_1} & & & +6\,I_2 & = & 10\,A & | \;\longleftarrow 1 \\
 & & & -12\,I_3 & +2\,I_5 & -6\,I_2 & = & 0 & | \\
 & & & 6\,I_3 & +8\,I_5 & & = & -30\,A & |
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & & +I_1 & & & -I_2 & = & 0 \\
 & I_6 & & +I_3 & +I_5 & & = & 0 \\
 & & -I_1 & -I_3 & & +I_2 & = & 0 \\
 & & & -2\,I_3 & & +8\,I_2 & = & 10\,A \\
 & & & -12\,I_3 & +2\,I_5 & -6\,I_2 & = & 0 \\
 & & & 6\,I_3 & +8\,I_5 & & = & -30\,A
\end{array}$$

L'élimination dans la colonne 3 est terminée.

<u>Etape 4 pour systèmes creux</u>

Parmi les colonnes 4 à 6, sélectionnons une colonne dont la partie inférieure est parmi les plus creuses - ici la colonne 6 - et permutons-la avec la colonne 4 :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & & +I_1 & -I_2 & & & = & 0 \\
 & I_6 & & & +I_5 & +I_3 & = & 0 \\
 & & -I_1 & +I_2 & & -I_3 & = & 0 \\
 & & & 8\,I_2 & & -2\,I_3 & = & 10\,A \\
 & & & -6\,I_2 & +2\,I_5 & -12\,I_3 & = & 0 \\
 & & & & +8\,I_5 & +6\,I_3 & = & -30\,A
\end{array}$$

Adoptons $\boxed{8\,I_2}$ comme quatrième pivot et éliminons dans la colonne 4 :

$$\begin{array}{rrrrrrcll}
-I_4 & & +I_1 & -I_2 & & & = & 0 & | \\
 & I_6 & & & +I_5 & +I_3 & = & 0 & | \\
 & & -I_1 & +I_2 & & -I_3 & = & 0 & | \\
 & & & 8\,I_2 & & -2\,I_3 & = & 10\,A & | \quad 3 \\
 & & & \boxed{-6\,I_2} & +2\,I_5 & -12\,I_3 & = & 0 & | \;\longleftarrow 4 \\
 & & & & +8\,I_5 & +6\,I_3 & = & -30\,A & |
\end{array}$$

On obtient

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & & +I_1 & -I_2 & & & = & 0 \\
 & I_6 & & & +I_5 & +I_3 & = & 0 \\
 & & -I_1 & +I_2 & & -I_3 & = & 0 \\
 & & & 8\,I_2 & & -2\,I_3 & = & 10\,A \\
 & & & & 8\,I_5 & -54\,I_3 & = & 30\,A \\
 & & & & +8\,I_5 & +6\,I_3 & = & -30\,A
\end{array}$$

<u>Etape 5</u>

Eliminons dans la cinquième colonne:

$$\begin{array}{rrrrrrcl|l}
-I_4 & & +I_1 & -I_2 & & & = & 0 & \\
 & I_6 & & & +I_5 & +I_3 & = & 0 & \\
 & & -I_1 & +I_2 & & -I_3 & = & 0 & \\
 & & & 8\,I_2 & & -2\,I_3 & = & 10\,A & \\
 & & & & 8\,I_5 & -54\,I_3 & = & 30\,A & \quad -1 \\
 & & & & 8\,I_5 & +6\,I_3 & = & -30\,A & \longleftarrow 1
\end{array}$$

On obtient un système triangulaire régulier

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-I_4 & & +I_1 & -I_2 & & & = & 0 \\
 & I_6 & & & +I_5 & +I_3 & = & 0 \\
 & & -I_1 & +I_2 & & -I_3 & = & 0 \\
 & & & 8\,I_2 & & -2\,I_3 & = & 10\,A \\
 & & & & 8\,I_5 & -54\,I_3 & = & 30\,A \\
 & & & & & 60\,I_3 & = & -60\,A
\end{array}$$

dont la solution est

$$I_3 = -1\,A,\quad I_5 = -3\,A,\quad I_2 = 1\,A,\quad I_1 = 2\,A,\quad I_6 = 4\,A,\quad I_4 = 1\,A$$

Corrigé de l'exercice 1-2- P 12

Multiplions les trois dernières équations par $\frac{1}{\Omega}$ et utilisons la relation $\frac{1\,V}{1\,\Omega} = 1\,A$

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
I_1 & -I_2 & -I_3 & & & & = & 0 \\
-I_1 & & & & +I_5 & +I_6 & = & 0 \\
 & & +I_3 & +I_4 & -I_5 & & = & 0 \\
20\,I_1 & & & & +20\,I_5 & & = & 10\,A \\
 & 20\,I_2 & & +20\,I_4 & & & = & 10\,A \\
20\,I_1 & +20\,I_2 & & & & & = & 10\,A
\end{array}$$

La méthode de résolution est analogue à celle des exercices 1-2- P 10 et 1-2- P 11.

On obtient

$$I_1 = 0.25\,A,\quad I_2 = 0.25\,A,\quad I_3 = 0,\quad I_4 = 0.25\,A,\quad I_5 = 0.25\,A,\quad I_6 = 0$$

Corrigé de l'exercice 1-2- P 13

Multiplions les trois dernières équations par $\frac{1}{\Omega}$ et utilisons la relation $\frac{1\,V}{1\,\Omega} = 1\,A$

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
I_1 & -I_2 & & -I_4 & & & = & 0 \\
 & I_2 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\
I_1 & & +I_3 & & & +I_6 & = & 0 \\
 & 8\,I_2 & & & & & = & 24\,A \\
 & -8\,I_2 & & +18\,I_4 & +10\,I_5 & & = & -40\,A \\
 & & & & -10\,I_5 & -11\,I_6 & = & -64\,A
\end{array}$$

La méthode de résolution est analogue à celle des exercices 1-2- P 10 et 1-2- P 11.

On obtient

$$I_1 = 1\,A, \quad I_2 = 3\,A, \quad I_3 = -5\,A, \quad I_4 = -2\,A, \quad I_5 = 2\,A, \quad I_6 = 4\,A$$

Partie facultative

Corrigé de l'exercice 1-2- P 3

Ecrivons le système sous la forme générale :

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{25}x & +\frac{1}{15}y & +\frac{1}{30}z & = \frac{22}{5} \\ \frac{1}{25}x & +\frac{1}{30}y & +\frac{1}{15}z & = \frac{23}{5} \\ x & +y & +z & = 100 \end{array}$$

La méthode est analogue à celle de l'exercice 1-2- P 2.
On obtient

$$x = 50, \quad y = 22, \quad z = 28$$

Corrigé de l'exercice 1-2- P 4

Pour la forme générale, comme $a_0 = 2$ est connu, nous allons écrire un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{array}{llll} a_1 & +a_2 & +a_3 & = 3 \\ -a_1 & +a_2 & -a_3 & = -3 \\ 2\,a_1 & +4\,a_2 & +8\,a_3 & = -5 \end{array}$$

La méthode est analogue à celle de l'exercice 1-2- P 2.
On obtient

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{29}{6}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{11}{6}$$

Corrigé de l'exercice 1-2- P 7

Non disponible.

Corrigé de l'exercice 1-2- P 8

Le courant à travers la résistance de 2 Ω est de 1 A.
Le courant à travers la résistance de 4 Ω est 0.
Le courant à travers la résistance de 3 Ω est de 1 A.

Réponse de l'exercice 1-2- P 9 (facultatif)

$$R = 2\,\Omega$$

$$I_1 = -2\,A, \quad I_2 = 1\,A$$

Les sens des courants sont définis dans le corrigé de l'exercice 1-1 P9.

Corrigé de l'exercice 1-3-P 1

```
a = {{1, 1/2, 0}, {1/3, 1, 0}, {1/4, 0, 1}}; MatrixForm[a]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b = 3000000 {1, 1, 1}; MatrixForm[b]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 3\,000\,000 \\ 3\,000\,000 \\ 3\,000\,000 \end{pmatrix}$$

```
{x, y, z} = LinearSolve[a, b]
```
résous équation linéaire

{1 800 000, 2 400 000, 2 550 000}

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[a]
```
espace nul

{}

Corrigé de l'exercice 1-3- P 2

Ecrivons le système sous la forme générale :

```
a = {{2/9, 1/4, 2/9}, {1/3, 1/3, 5/18}, {4/9, 5/12, 1/2}}; MatrixForm[a]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{4} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
b = {34, 46, 67}; MatrixForm[b]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 34 \\ 46 \\ 67 \end{pmatrix}$$

```
{x, y, z} = LinearSolve[a, b]
```
résous équation linéaire

{45, 48, 54}

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[a]
```
espace nul

{}

La solution vérifie les inéquations

$$0 \le x \le 90$$
$$0 \le y \le 120$$
$$0 \le z \le 180$$

Corrigé de l'exercice 1-3- P 5

```
m = {{2, 4, 8, 16}, {3, 9, 27, 81}, {4, 16, 64, 256}, {5, 25, 125, 625}}; MatrixForm[m]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \\ 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix}$$

```
b = {4, 2, 7, -1}; MatrixForm[b]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

```
a = LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

$$\left\{\frac{2023}{60}, -\frac{3719}{120}, \frac{563}{60}, -\frac{109}{120}\right\}$$

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[m]
```
espace nul

{}

<u>Vérification</u>

```
Clear[p, x]; p[x_] := -1 + a[[1]] x + a[[2]] x^2 + a[[3]] x^3 + a[[4]] x^4
```
efface

```
p[x]
```

$$-1 + \frac{2023\,x}{60} - \frac{3719\,x^2}{120} + \frac{563\,x^3}{60} - \frac{109\,x^4}{120}$$

```
Map[p, {0, 2, 3, 4, 5}]
```
applique

{-1, 3, 1, 6, -2}

Corrigé de l'exercice 1-3- P 6

<u>Le système n'est pas linéaire</u>. Pour le résoudre, utilisons la méthode **Reduce**

```
Clear[x, y];
```
efface

```
Reduce[y == x^2 - x ∧ y == 4/x ∧ x ∈ Reals ∧ y ∈ Reals, {x, y}]
```
réduis nombres réels nombres réels

x == 2 && y == 2

Le système possède donc une et une seule solution $(x, y) = (2, 2)$.

Corrigé de l'exercice 1-3- P 10

```
m = {{-1, 1, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, -1, 1}, {1, -1, 0, 1, 0, 0},
  {6, 2, 0, 0, 0, 0}, {0, -2, -6, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 20}}; MatrixForm[m]
                                                                  apparence matriciel
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

```
b = {0, 0, 0, 20, -20, 20}; MatrixForm[b]
                            apparence matriciel
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

```
i = LinearSolve[m, b]
    résous équation linéaire
```

{2, 4, 2, 2, 3, 1}

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[m]
espace nul
```

{}

<u>Interprétation</u>

i[[1]] = 2 signifie $I_1 = 2\,A$ et ce courant circule dans le sens choisi (voir figure dans le corrigé de l'exercice 1-1- P 10).

Corrigé de l'exercice 1-3- P 11

```
m = {{-1, 1, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 1, 1}, {1, -1, 0, -1, 0, 0},
  {2, 6, 0, 0, 0, 0}, {0, -6, -12, 0, 2, 0}, {0, 0, 0, 0, -2, 6}}; MatrixForm[m]
                                                                    apparence matriciel
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

```
b = {0, 0, 0, 10, 0, 30}; MatrixForm[b]
                          apparence matriciel
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

```
i = LinearSolve[m, b]
     résous équation linéaire
```

{2, 1, -1, 1, -3, 4}

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[m]
espace nul
```

{}

Interprétation

i[[3]] = –1 signifie $I_3 = -1\ A$ ce qui signifie qu'un courant de 1 A circule dans le sens inverse du sens choisi (voir fig).

etc.

Corrigé de l'exercice 1-3- P 12

```
m = {{1, -1, -1, 0, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0, 1, 1}, {0, 0, 1, 1, -1, 0},
   {20, 0, 0, 0, 20, 0}, {0, 20, 0, 20, 0, 0}, {20, 20, 0, 0, 0, 0}}; MatrixForm[m]
                                                                        apparence matriciel
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
b = {0, 0, 0, 10, 10, 10}; MatrixForm[b]
                           apparence matriciel
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

```
i = LinearSolve[m, b]
     résous équation linéaire
```

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right\}$$

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[m]
espace nul
```

{}

Corrigé de l'exercice 1-3- P 13

```
m = {{1, -1, 0, -1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0, 1, 0}, {1, 0, 1, 0, 0, 1},
  {0, 8, 0, 0, 0, 0}, {0, -8, 0, 18, 10, 0}, {0, 0, 0, 0, -10, -11}}; MatrixForm[m]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 18 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -11 \end{pmatrix}$$

```
b = {0, 0, 0, 24, -40, -64}; MatrixForm[b]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \\ -40 \\ -64 \end{pmatrix}$$

```
i = LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

{1, 3, -5, -2, 2, 4}

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[m]
```
espace nul

{}

Partie facultative

Corrigé de l'exercice 1-3- P 3

Ecrivons le système sous la forme générale :

$$a = \left\{\left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}\right\}, \left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{30}, \frac{1}{15}\right\}, \{1, 1, 1\}\right\}; \text{MatrixForm}[a]$$
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \left\{4 + \frac{24}{60}, 4 + \frac{36}{60}, 100\right\}; \text{MatrixForm}[b]$$
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} \frac{22}{5} \\ \frac{23}{5} \\ 100 \end{pmatrix}$$

```
{x, y, z} = LinearSolve[a, b]
```
résous équation linéaire

{50, 22, 28}

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[a]
```
espace nul

```
{}
```

Corrigé de l'exercice 1-3- P 4

```
m = {{1, 1, 1}, {-1, 1, -1}, {2, 4, 8}}; MatrixForm[m]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

```
b = {3, -3, -5}; MatrixForm[b]
```
apparence matriciel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

```
a = LinearSolve[m, b]
```
résous équation linéaire

$$\left\{\frac{29}{6}, 0, -\frac{11}{6}\right\}$$

Une solution existe donc. Vérifions qu'elle est unique :

```
NullSpace[m]
```
espace nul

```
{}
```

Vérification

```
Clear[p, x]; p[x_] := 2 + a[[1]] x + a[[2]] x^2 + a[[3]] x^3
```
efface

```
p[x]
```

$$2 + \frac{29 x}{6} - \frac{11 x^3}{6}$$

```
Map[p, {0, 1, -1, 2}]
```
applique

```
{2, 5, -1, -3}
```

Corrigé de l'exercice 1-3- P 7

Non disponible.

Corrigé de l'exercice 1-3- P 8

Le courant à travers la résistance de 2 Ω est de 1 A.
Le courant à travers la résistance de 4 Ω est 0.
Le courant à travers la résistance de 3 Ω est de 1 A.

Corrigé de l'exercice 1-3- P 9

Non disponible.