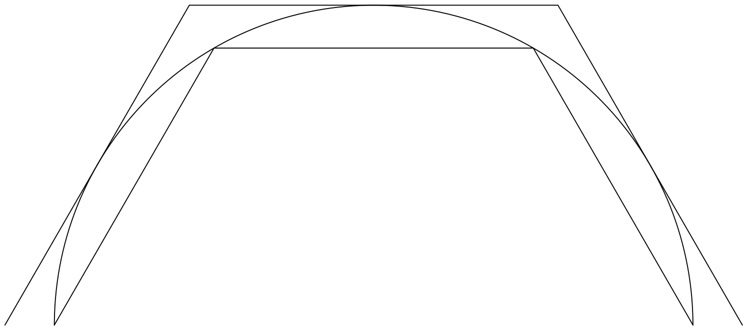
Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : Approximation de longueurs d'arcs par la méthode d' Archimède
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/longueur_arc/Longueur-arc.pdf

Corrigé de l'exercice 1-1-2



Le côté d'un triangle du polygone inscrit est 1.

$d_0 = 3$

La hauteur d'un triangle du polygone circonscrit est 1.

La hauteur d'un triangle du polygone inscrit est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les polygones inscrit et circonscrit sont homothétiques.

Le rapport d'homothétie est de $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$e_0 = \frac{d_0}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2\sqrt{3} \simeq 3.46410$$

L'approximation $\quad d_0 < \pi < e_0 \quad$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\pi = \frac{d_0 + e_0}{2} \pm \frac{e_0 - d_0}{2} = 3.23 \pm 0.24$$

Corrigé de l'exercice 1-2-5

Calcul par récurrence (voir Rel. 1-2-8)

```
s = 1.;        (*sinus de π/2 *)
c0 = √(1 - s²);
d0 = s;
```

```
Clear[successeur];
```
effacе

$$\text{successeur}[\{c\_, d\_\}] := \left\{\sqrt{\frac{1+c}{2.}},\ d\sqrt{\frac{2.}{1+c}}\right\}$$

```
tabelle = NestList[successeur, {c0, d0}, 3]
```
liste d'imbrication

```
{{0., 1.}, {0.707107, 1.41421}, {0.92388, 1.53073}, {0.980785, 1.56072}}
```

```
NumberForm[TableForm[tabelle], 16]
```
apparence ⋯ forme de table

```
0.                    1.
0.7071067811865476    1.414213562373095
0.923879532511287     1.530733729460359
0.98078528040323      1.560722576129026
```

```
{c3, d3} = Last[tabelle]
```
dernier

```
{0.980785, 1.56072}
```

Approximation par excès (voir Rel. 1-2-5)

$$e3 = \frac{d3}{c3}$$

```
1.5913
```

Calcul de l'erreur (voir le paragraphe qui précède la Rel. 1-2-9)

$$x3 = \frac{d3 + e3}{2};\ \Delta x3 = \frac{e3 - d3}{2};$$

```
NumberForm[x3, 3]
```
apparence numérique

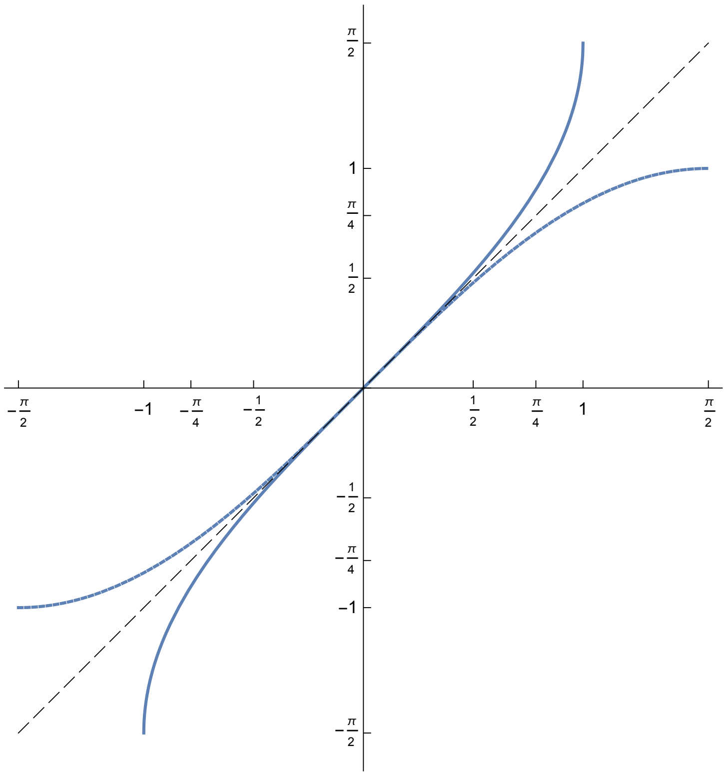
```
"±" NumberForm[Δx3, 1]
```
apparence numérique

```
1.58
± 0.02
```

Corrigé de l'exercice 1-4-1

x	-1.571	-1.178	-0.785	-0.393	0.000	0.393	0.785	1.178	1.571
sin(x)	-1.000	-0.924	-0.707	-0.383	0.000	0.383	0.707	0.924	1.000

s	-1.000	-0.924	-0.707	-0.383	0.000	0.383	0.707	0.924	1.000
Arcsin(s)	-1.571	-1.178	-0.785	-0.393	0.000	0.393	0.785	1.178	1.571



Légendes du graphique ci-dessus :

en pointillé : $x \mapsto \sin(x)$

en trait continu épais : $s \mapsto \text{Arcsin}(s)$

en traitillé : axe de symétrie $y = x$

$$\text{Arcsin}(\sin(1.2)) = 1.2$$

$$\sin(\text{Arcsin}(0.8)) = 0.8$$

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \qquad \text{pour tout } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\text{Arcsin}(s)) = s \qquad \text{pour tout } s \in [-1;\ 1].$$

Corrigé de l'exercice 1-4-2

```
Clear[successeur];
```
efface

$$\text{successeur}[\{c\_, d\_\}] := \left\{\sqrt{\frac{1+c}{2.}},\ d\sqrt{\frac{2.}{1+c}}\right\}$$

```
Clear[arcSinus];
```
efface

$$\text{arcSinus}[s\_] := \frac{180}{\pi}\,\text{FixedPoint}\left[\text{successeur},\ \left\{\sqrt{1-s^2},\ s\right\}\right][[2]]$$

point fixe

$$\text{Table}\left[\{N[s],\ \text{arcSinus}[s]\},\ \left\{s,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{10}\right\}\right]$$

table · valeur numérique

```
{{0., 0.}, {0.1, 5.73917}, {0.2, 11.537}, {0.3, 17.4576}, {0.4, 23.5782}, {0.5, 30.},
 {0.6, 36.8699}, {0.7, 44.427}, {0.8, 53.1301}, {0.9, 64.1581}, {1., 90.}}
```

Comparons les valeurs calculées par notre programme avec les valeurs données par Mathematica

$$t = \text{Table}\left[\left\{N[s],\ N\left[\text{ArcSin}[s\,]\,/\,°\right]\right\},\ \left\{s,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{10}\right\}\right]$$

table · valeu·· · ·· · arc sinus

```
{{0., 0.}, {0.1, 5.73917}, {0.2, 11.537}, {0.3, 17.4576}, {0.4, 23.5782}, {0.5, 30.},
 {0.6, 36.8699}, {0.7, 44.427}, {0.8, 53.1301}, {0.9, 64.1581}, {1., 90.}}
```

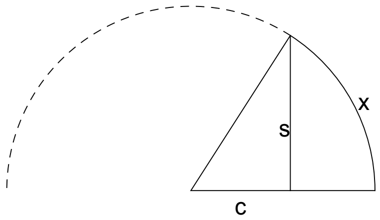
```
TableForm[t, TableHeadings → {None, {"s", "ArcSin(s) en °"}}]
```
forme de table · en–têtes de table · aucun · arc sinus

s	ArcSin(s) en °
0.	0.
0.1	5.73917
0.2	11.537
0.3	17.4576
0.4	23.5782
0.5	30.
0.6	36.8699
0.7	44.427
0.8	53.1301
0.9	64.1581
1.	90.

Corrigé de l'exercice 1-4-3

La restriction $\cos : [0;\ \pi] \longrightarrow [-1;\ 1]$ est bijective;
sa fonction réciproque est $\text{Arccos} : [-1;\ 1] \longrightarrow [0;\ \pi]$

Pour (c, s) donné, l'algorithme d'Archimède nous donne la longueur d'arc correspondante x.



Lorsque s est donné, la valeur de démarrage est $(c, s) = (\sqrt{1-s^2}, s)$
et le résultat obtenu est $x = \text{Arcsin}(s)$.

Lorsque c est donné, la valeur de démarrage est $(c, s) = (c, \sqrt{1-c^2})$
et le résultat obtenu est $x = \text{Arccos}(c)$.

```
Clear[successeur];
```
effface

$$\text{successeur[\{c\_, d\_\}] := }\left\{\sqrt{\frac{1+c}{2.}},\ d\sqrt{\frac{2.}{1+c}}\right\}$$

```
Clear[arcCosinus];
```
efface

$$\text{arcCosinus[c\_] := FixedPoint}\left[\text{successeur, }\left\{c, \sqrt{1-c^2}\right\}\right][[2]]$$
point fixe

$$\text{Table}\left[\{\text{N[c], arcCosinus[c]}\}, \left\{c, 0, 1, \frac{1}{10}\right\}\right]$$
table valeur numérique

```
{{0., 1.5708}, {0.1, 1.47063}, {0.2, 1.36944},
 {0.3, 1.2661}, {0.4, 1.15928}, {0.5, 1.0472}, {0.6, 0.927295},
 {0.7, 0.795399}, {0.8, 0.643501}, {0.9, 0.451027}, {1., 0.}}
```

Comparons les valeurs calculées par notre programme avec les valeurs données par Mathematica

$$\text{Table}\left[\{\text{N[c], N[ArcCos[c]]}\}, \left\{c, 0, 1, \frac{1}{10}\right\}\right]$$
table valeu·· ·· arc cosinus

```
{{0., 1.5708}, {0.1, 1.47063}, {0.2, 1.36944},
 {0.3, 1.2661}, {0.4, 1.15928}, {0.5, 1.0472}, {0.6, 0.927295},
 {0.7, 0.795399}, {0.8, 0.643501}, {0.9, 0.451027}, {1., 0.}}
```

Corrigé de l'exercice 1-4-4

A l'intérieur du premier quadrant,

$$t = \frac{s}{c} = \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$t^2 = \frac{s^2}{1 - s^2}$$

$$t^2 - t^2 s^2 = s^2$$

$$t^2 = s^2 (t^2 + 1)$$

$$s^2 = \frac{t^2}{1 + t^2} \qquad c^2 = 1 - s^2 = \frac{t^2 + 1 - t^2}{t^2 + 1} = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$s = t \sqrt{\frac{1}{1 + t^2}} \qquad c = \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}$$

```
Clear[successeur];
```
efface

$$\texttt{successeur[\{c\_, d\_\}] := }\left\{\sqrt{\frac{1 + c}{2.}},\ d \sqrt{\frac{2.}{1 + c}}\right\}$$

```
Clear[arcTangente];
```
efface

$$\texttt{arcTangente[t\_] := FixedPoint}\left[\texttt{successeur, } \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}\ \{1, t\}\right]\texttt{[[2]]}$$
point fixe

$$\texttt{Table}\left[\{\texttt{N[t], arcTangente[t]}\},\ \left\{t, 0, 2, \frac{1}{10}\right\}\right]$$
table valeur numérique

```
{{0., 0.}, {0.1, 0.0996687}, {0.2, 0.197396}, {0.3, 0.291457},
 {0.4, 0.380506}, {0.5, 0.463648}, {0.6, 0.54042}, {0.7, 0.610726},
 {0.8, 0.674741}, {0.9, 0.732815}, {1., 0.785398}, {1.1, 0.832981},
 {1.2, 0.876058}, {1.3, 0.915101}, {1.4, 0.950547}, {1.5, 0.982794},
 {1.6, 1.0122}, {1.7, 1.03907}, {1.8, 1.0637}, {1.9, 1.08632}, {2., 1.10715}}
```

Comparons les valeurs calculées par notre programme avec les valeurs données par Mathematica

$$\texttt{Table}\left[\{\texttt{N[t], N[ArcTan[t]]}\},\ \left\{t, 0, 2, \frac{1}{10}\right\}\right]$$
table valeu·· ·· arc tangente

```
{{0., 0.}, {0.1, 0.0996687}, {0.2, 0.197396}, {0.3, 0.291457},
 {0.4, 0.380506}, {0.5, 0.463648}, {0.6, 0.54042}, {0.7, 0.610726},
 {0.8, 0.674741}, {0.9, 0.732815}, {1., 0.785398}, {1.1, 0.832981},
 {1.2, 0.876058}, {1.3, 0.915101}, {1.4, 0.950547}, {1.5, 0.982794},
 {1.6, 1.0122}, {1.7, 1.03907}, {1.8, 1.0637}, {1.9, 1.08632}, {2., 1.10715}}
```

Corrigé de l' exercice 2-1-1

L'idée consiste à transformer l'angle x en radians, puis à utiliser la méthode de calcul du cours :

```
Clear[predecesseur, sinus];
```
efface

$$\text{predecesseur}[s\_] := N\left[s\sqrt{4 - 4 s^2}\right];$$
valeur numérique

$$\text{sinus}[x\_] := \text{Nest}\left[\text{predecesseur}, \frac{\pi x}{180 * 2^{23}}, 23\right];$$
imbrique

```
TableForm[Table[{x, sinus[x], N[Sin[x °]]}, {x, 0, 90, 10}]]
```
forme de ta··· table ·· sinus

0	0.	0.
10	0.173648	0.173648
20	0.34202	0.34202
30	0.5	0.5
40	0.642788	0.642788
50	0.766044	0.766044
60	0.866025	0.866025
70	0.939693	0.939693
80	0.984808	0.984808
90	1.	1.

Corrigé de l'exercice 2-1-2

```
Clear[predecesseur, sinus, erreur];
```
efface

$$\text{predecesseur}[s\_] := N\left[s\sqrt{4 - 4 s^2}\right];$$
valeur numérique

$$\text{sinus}[x\_] := \text{Nest}\left[\text{predecesseur}, \frac{x}{2^{23}}, 23\right];$$
imbrique

```
erreur[x_] := sinus[x] - N[Sin[x]];
```
·· sinus

```
TableForm[Table[{x, erreur[x]}, {x, 0, π/2, π/50}]]
```
forme de ta··· table

0	$0.$
$\frac{\pi}{50}$	-2.77556×10^{-17}
$\frac{\pi}{25}$	-5.55112×10^{-17}
$\frac{3\pi}{50}$	-8.32667×10^{-17}
$\frac{2\pi}{25}$	-5.55112×10^{-17}
$\frac{\pi}{10}$	2.22045×10^{-16}
$\frac{3\pi}{25}$	-5.55112×10^{-17}
$\frac{7\pi}{50}$	2.77556×10^{-16}
$\frac{4\pi}{25}$	5.55112×10^{-17}
$\frac{9\pi}{50}$	1.11022×10^{-16}
$\frac{\pi}{5}$	7.77156×10^{-16}
$\frac{11\pi}{50}$	3.33067×10^{-16}
$\frac{6\pi}{25}$	5.55112×10^{-16}
$\frac{13\pi}{50}$	6.66134×10^{-16}
$\frac{7\pi}{25}$	1.11022×10^{-15}
$\frac{3\pi}{10}$	8.88178×10^{-16}
$\frac{8\pi}{25}$	1.11022×10^{-15}
$\frac{17\pi}{50}$	1.22125×10^{-15}
$\frac{9\pi}{25}$	1.33227×10^{-15}
$\frac{19\pi}{50}$	1.22125×10^{-15}
$\frac{2\pi}{5}$	1.66533×10^{-15}
$\frac{21\pi}{50}$	1.33227×10^{-15}
$\frac{11\pi}{25}$	8.88178×10^{-16}
$\frac{23\pi}{50}$	8.88178×10^{-16}
$\frac{12\pi}{25}$	5.55112×10^{-16}
$\frac{\pi}{2}$	$0.$

Pour N = 23, l'erreur peut dépasser 10^{-15}. Essayons N = 24.

```
Clear[predecesseur, sinus, erreur];
```
efface

```
predecesseur[s_] := N[s √(4 - 4 s^2)];
```
valeur numérique

```
sinus[x_] := Nest[predecesseur, x/2^24, 24];
```
imbrique

```
erreur[x_] := sinus[x] - N[Sin[x]];
```
·· sinus

```
TableForm[Table[{x, erreur[x]}, {x, 0, π/2, π/50}]]
```

forme de ta··· table

0	$0.$
$\frac{\pi}{50}$	-2.77556×10^{-17}
$\frac{\pi}{25}$	-8.32667×10^{-17}
$\frac{3\pi}{50}$	-1.11022×10^{-16}
$\frac{2\pi}{25}$	-1.11022×10^{-16}
$\frac{\pi}{10}$	1.66533×10^{-16}
$\frac{3\pi}{25}$	-1.66533×10^{-16}
$\frac{7\pi}{50}$	1.11022×10^{-16}
$\frac{4\pi}{25}$	-1.11022×10^{-16}
$\frac{9\pi}{50}$	-1.11022×10^{-16}
$\frac{\pi}{5}$	3.33067×10^{-16}
$\frac{11\pi}{50}$	-1.11022×10^{-16}
$\frac{6\pi}{25}$	-1.11022×10^{-16}
$\frac{13\pi}{50}$	$0.$
$\frac{7\pi}{25}$	4.44089×10^{-16}
$\frac{3\pi}{10}$	$0.$
$\frac{8\pi}{25}$	2.22045×10^{-16}
$\frac{17\pi}{50}$	3.33067×10^{-16}
$\frac{9\pi}{25}$	2.22045×10^{-16}
$\frac{19\pi}{50}$	2.22045×10^{-16}
$\frac{2\pi}{5}$	6.66134×10^{-16}
$\frac{21\pi}{50}$	2.22045×10^{-16}
$\frac{11\pi}{25}$	1.11022×10^{-16}
$\frac{23\pi}{50}$	2.22045×10^{-16}
$\frac{12\pi}{25}$	1.11022×10^{-16}
$\frac{\pi}{2}$	$0.$

Corrigé de l'exercice 2-1-3

On peut ramener le calcul du cosinus au calcul d'un sinus, par exemple

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

```
Clear[predecesseur, sinus, cosinus];
```
efface

predecesseur[s_] := N[s $\sqrt{4 - 4 s^2}$];
valeur numérique

sinus[x_] := Nest[predecesseur, $\frac{x}{2^{23}}$, 23];
imbrique

cosinus[x_] := sinus[$\frac{\pi}{2}$ - x];

Table[{x, cosinus[x]}, {x, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{12}$}]
table

$\{\{0, 1.\}, \{\frac{\pi}{12}, 0.965926\}, \{\frac{\pi}{6}, 0.866025\}, \{\frac{\pi}{4}, 0.707107\}, \{\frac{\pi}{3}, 0.5\}, \{\frac{5\pi}{12}, 0.258819\}, \{\frac{\pi}{2}, 0.\}\}$

Corrigé de l'exercice 2-1-4

On peut ramener le calcul de la tangente au calcul d'un sinus et d'un cosinus, par exemple

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

```
Clear[predecesseur, sinus, cosinus];
```
efface

predecesseur[s_] := N[s $\sqrt{4 - 4 s^2}$];
valeur numérique

sinus[x_] := Nest[predecesseur, $\frac{x}{2^{23}}$, 23];
imbrique

cosinus[x_] := sinus[$\frac{\pi}{2}$ - x];

tangente[x_] := $\frac{\text{sinus[x]}}{\text{cosinus[x]}}$;

Table[{x, tangente[x]}, {x, 0, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$}]
table

$\{\{0, 0.\}, \{\frac{\pi}{12}, 0.267949\}, \{\frac{\pi}{6}, 0.57735\}, \{\frac{\pi}{4}, 1.\}, \{\frac{\pi}{3}, 1.73205\}, \{\frac{5\pi}{12}, 3.73205\}\}$

Corrigé de l'exercice 2-2-1

<u>Première étape : se ramener à l'intervalle [0; 2 π[</u>

On utilise la propriété "la fonction cosinus est périodique de période 2 π"

```
Clear[cosinus];
```
efface

```
cosinus[x_] := cosinus[Mod[x, 2 π]] /; x < 0 ∨ x ≥ 2 π
```
modulo mod

Le symbole "Mod" se lit "modulo"; il donne le reste de la division entière;
c'est ainsi que Mod[25, 7] vaut 4;

le symbole /; se lit "à la condition que";
le symbole ∨ se lit "ou".
Nous avons défini une règle de transformation conditionnelle dont voici l'effet:

```
cosinus[104]
```

```
cosinus[104 - 32 π]
```

```
cosinus[104.]
```

```
cosinus[3.46904]
```

<u>Deuxième étape : se ramener à l'intervalle</u> [0; π [

On utilise la propriété "cos(x-π) = - cos(x)"

```
cosinus[x_] := -cosinus[x - π] /; x ≥ π
```

Cette deuxième règle ne remplace pas la première mais est exécutée après elle.

```
cosinus[104]
```

```
-cosinus[104 - 33 π]
```

```
cosinus[104.]
```

```
-cosinus[0.327442]
```

<u>Troisième étape : se ramener à l'intervalle</u> [0; $\frac{\pi}{2}$]

On utilise la propriété "les cosinus d'angles supplémentaires sont opposés"

```
cosinus[x_] := -cosinus[π - x] /; x > π/2
```

```
cosinus[104]
```

```
-cosinus[104 - 33 π]
```

```
cosinus[104.]
```

```
-cosinus[0.327442]
```

Résumé des trois premières étapes:
pour calculer la fonction cosinus sur l'ensemble des réels, il suffit de savoir calculer le cosinus sur l'intervalle [0; $\frac{\pi}{2}$].

<u>Quatrième étape : calcul du cosinus sur l'intervalle</u> [0; $\frac{\pi}{2}$]

Nous avons vu au § 2-1 comment calculer le sinus et le cosinus d'un angle

```
Clear[predecesseur];
```
efface

```
predecesseur[s_] := N[s Sqrt[4 - 4 s^2]];
```
valeur numérique

```
sinus[x_] := Nest[predecesseur, x/2^23, 23];
```
imbrique

```
cosinus[x_] := sinus[π/2 - x]
```

```
cosinus[104]
```

```
-0.946868
```

```
cosinus[104] - Cos[104]
                 cosinus
```

3.33067×10^{-16}

Règles de transformations

```
? cosinus
```

```
Global`cosinus
```

```
cosinus[x_] := cosinus[Mod[x, 2 π]] /; x < 0 || x ≥ 2 π

cosinus[x_] := -cosinus[x - π] /; x ≥ π

cosinus[x_] := -cosinus[π - x] /; x > π/2

cosinus[x_] := sinus[π/2 - x]
```

L'ordre des règles joue un rôle : *Mathematica* applique les règles dans l'ordre.
Dans notre exemple, la dernière règle est inconditionnelle et achève le calcul.

Corrigé de l'exercice 2-2-2

```
Clear[tangente]
efface
```

La fonction tangente est périodique, de période π.
On se ramène d'abord à l'intervalle $[0, \pi[$.

```
tangente[x_] := tangente[Mod[x, π]] /; x < 0 ∨ x ≥ π
                         modulo mod
```

```
tangente[100]
```

```
tangente[100 - 31 π]
```

```
tangente[100.]
```

```
tangente[2.61063]
```

On se ramène ensuite à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ grâce aux relations de parité et de périodicité

$$-\tan(x) = \tan(-x) = \tan(\pi - x)$$

```
tangente[x_] := -tangente[π - x] /; x > π/2
```

```
tangente[100]
```

```
-tangente[-100 + 32 π]
```

```
tangente[100.]
```

```
-tangente[0.530965]
```

On utilise enfin la méthode de calcul de la fonction tangente définie dans l'exercice 2-1-4, qui est valable sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$:

```
Clear[predecesseur, sinus];
```
efface

$$\texttt{predecesseur[s\_] := N}\left[\texttt{s}\sqrt{4-4\,\texttt{s}^2}\right];$$
valeur numérique

$$\texttt{sinus[x\_] := Nest}\left[\texttt{predecesseur}, \frac{\texttt{x}}{2^{23}}, 23\right];$$
imbrique

$$\texttt{tangente[x\_] :=} \frac{\texttt{sinus[x]}}{\sqrt{1-\texttt{sinus[x]}^2}};$$

```
? tangente
```

Global`tangente

$\texttt{tangente[x\_] := tangente[Mod[x, }\pi\texttt{]] /; x < 0 || x} \geq \pi$

$\texttt{tangente[x\_] := -tangente[}\pi\texttt{ - x] /; x >} \frac{\pi}{2}$

$\texttt{tangente[x\_] :=} \frac{\texttt{sinus[x]}}{\sqrt{1-\texttt{sinus[x]}^2}}$

```
tangente[100]
```

-0.587214

```
tangente[100] - Tan[100]
```
tangente

5.10703×10^{-15}