Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : méthode de la sécante, méthodes itératives de type point-fixe, méthode pseudo-newton
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/equations/2-3_2-4_Equations.pdf

Corrigé de l'exercice 2-3 -1

L'équation de la droite cherchée est de la forme

$$y = m\,x + p$$

La pente m de la droite est égale à

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

L'équation de la droite devient

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,x + p$$

Cette droite passe par le point (*a, f(a)*), ce qui nous permet de calculer *p*

$$f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,a + p$$

$$p = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,a$$

Remplaçons dans l'équation de la droite pour obtenir <u>l'équation de la sécante</u> :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,a$$

$$y = \frac{x\,(f(b) - f(a)) + (b - a)\,f(a) - a\,f(b) + a\,f(a)}{b - a}$$

$$\boxed{y = \frac{x\,(f(b) - f(a)) + b\,f(a) - a\,f(b)}{b - a}}$$

Calculons l'intersection de cette sécante avec l'axe des x :

$$\frac{x_1\,(f(b) - f(a)) + b\,f(a) - a\,f(b)}{b - a} = 0$$

$$x_1\,(f(b) - f(a)) + b\,f(a) - a\,f(b) = 0$$

$$x_1\,(f(b) - f(a)) = a\,f(b) - b\,f(a)$$

$$x_1 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Choix de l'approximation suivante :

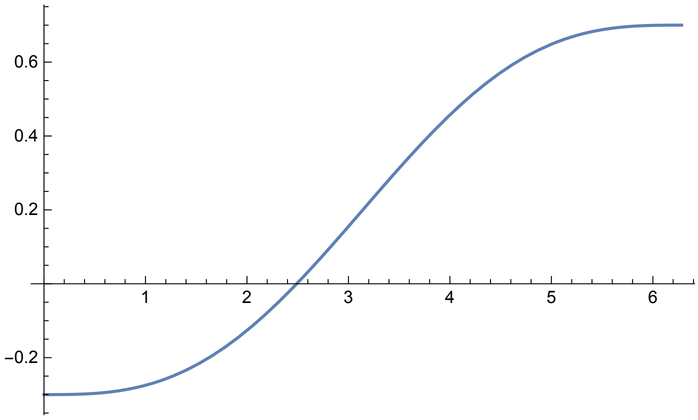
si $f(a)\,f(x_1) < 0$ alors le prochain encadrement est $[a;\ x_1]$
sinon le prochain encadrement est $[x_1;\ b]$

Corrigé de l'exercice 2-3 P 4 partie a)

```
t = 0.3;
```

$$\texttt{f}[\alpha\_] := \frac{\alpha - \texttt{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} - \texttt{t}$$

```
Plot[f[α], {α, 0, 2 π}]
```
tracé de courbes



$$\text{secante}[a\_, b\_] := \frac{a\,f[b] - b\,f[a]}{f[b] - f[a]}$$

```
Sign[f[2]]
```
signe

−1

```
Sign[f[3]]
```
signe

1

```
x1 = secante[2, 3]
```

2.44919

```
Sign[f[x1]]
```
signe

−1

```
x2 = secante[x1, 3]
```

2.48816

```
Sign[f[x2]]
```
signe

−1

```
x3 = secante[x2, 3]
```

2.49062

```
Sign[f[x3]]
```
signe

−1

```
x4 = secante[x3, 3]
```

2.49078

```
Sign[f[x4]]
```
signe

-1

```
x5 = secante[x4, 3]
```

2.49078

On remarque que les 6 premiers chiffres significatifs de la borne de gauche n'ont pas changé. La précision de 10^{-5} est atteinte.
D'une part, la méthode ne converge pas dans le sens que l'écart entre a et b ne tend pas vers 0.
D'autre part, on peut se rendre compte que les bornes de gauche x1, x2, x3, ... tendent vers la réponse que nous cherchons x ≈ 2.49078
De plus, cette convergence est plus rapide que dans la méthode de la bissection.

```
f[x5]
```

-1.72013×10^{-7}

```
r = 1;
```

$$h = r * \left(1 - \text{Cos}\left[\frac{x5}{2}\right]\right)$$
cosinus

0.680308

Corrigé de l'exercice 2-3 P 4 partie b)

```
t = 0.3; Clear[f];
```
efface

$$f[\alpha\_] := \frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\,\pi} - t$$

```
Sign[f[2]]
```
signe

-1

```
Sign[f[3]]
```
signe

1

La fonction **succ[...]** , appliquée à un intervalle contenant un zéro de *f*, donne un nouvel intervalle qui est emboîté dans l'intervalle donné et contient un zéro de *f* ; ce nouvel intervalle est déterminé au moyen de la méthode de la sécante. En d'autres termes, la fonction **succ[...]** (comme "successeur de l'intervalle ...") réalise un pas de la méthode de la sécante.

```
Clear[succ];
```
efface

$$succ[\{a\_, b\_\}] := \text{Module}\left[\{x1\}, x1 = \frac{a\, f[b] - b\, f[a]}{f[b] - f[a]};\right.$$
module

```
  If[f[x1] f[b] < 0, {x1, b}, {a, x1}]]
```
si

La méthode de la sécante consiste à enchaîner des pas consécutifs à partir d'un intervalle de démarrage:

```
ie = NestList[succ, {2, 3}, 5]
```
liste d'imbrication

```
{{2, 3}, {2.44919, 3}, {2.48816, 3}, {2.49062, 3}, {2.49078, 3}, {2.49078, 3}}
```

On remarque que les 6 premiers chiffres significatifs de la borne de gauche n'ont pas changé. La précision de 10^{-5} est atteinte.
D'une part, la méthode ne converge pas dans le sens que l'écart entre a et b ne tend pas vers 0.
D'autre part, on peut se rendre compte que les bornes de gauche x1, x2, x3, ... tendent vers la réponse que nous cherchons x ≈ 2.49078
De plus, cette convergence est plus rapide que dans la méthode de la bissection.

```
x5 = First[Last[ie]]
```
premier dernier

```
2.49078
```

```
f[x5]
```

-1.72013×10^{-7}

```
r = 1;
```

$$h = r * \left(1 - \text{Cos}\left[\frac{x5}{2}\right]\right)$$
cosinus

```
0.680308
```

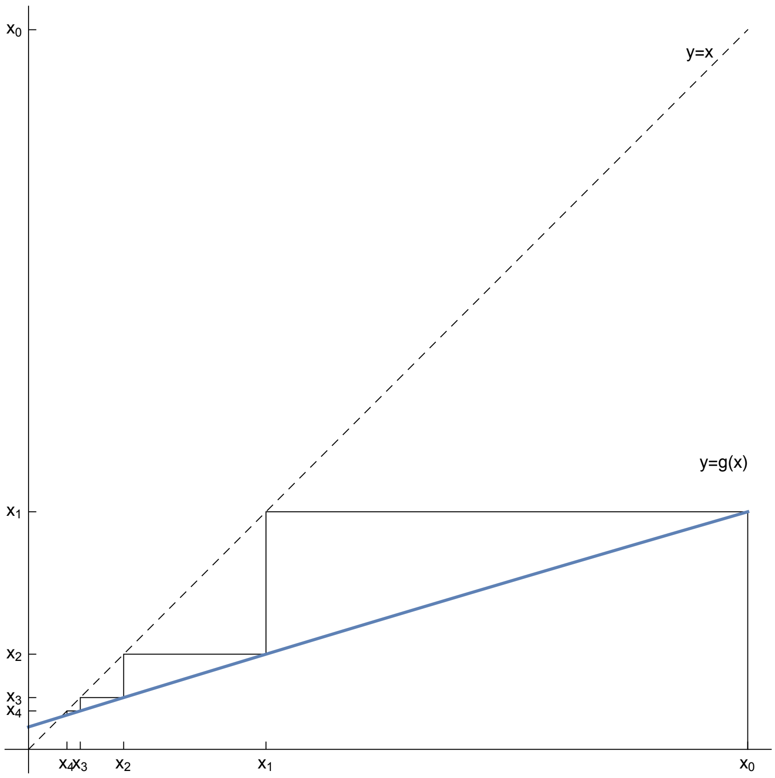
Corrigé de l'équation 2-4 - 1

$\text{Clear}[g];\ g[x\_] := \sqrt{1 + x};$
efface

```
x0 = 2.;
NestList[g, x0, 10]
```
liste d'imbrication

```
{2., 1.73205, 1.65289, 1.62877, 1.62135,
 1.61906, 1.61835, 1.61813, 1.61806, 1.61804, 1.61804}
```

Le point fixe $r = 1.61804$ est solution de l'équation $x = \sqrt{1 + x}$



y=x
y=g(x)
x0
x1
x2
x3
x4
x4
x3
x2
x1
x0

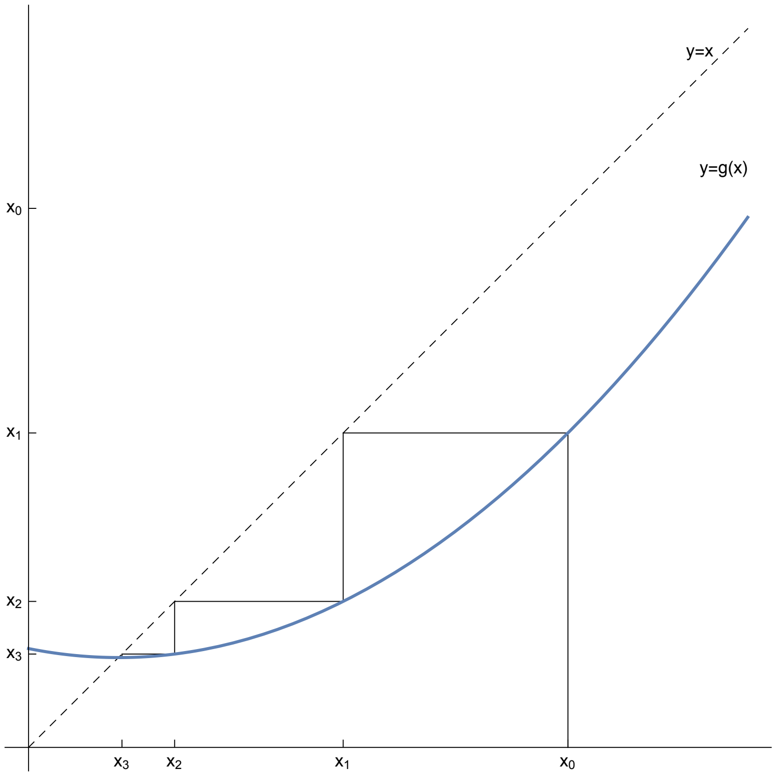
Corrigé de l'exercice 2-4-1 b)

```
Clear[g]; g[x_] := x^2;
```
efface

```
x0 = 0.5;
NestList[g, x0, 5]
```
liste d'imbrication

$\{0.5, 0.25, 0.0625, 0.00390625, 0.0000152588, 2.32831 \times 10^{-10}\}$

La suite converge vers le point fixe $r = 0$ qui est solution de l' équation $x = x^2$



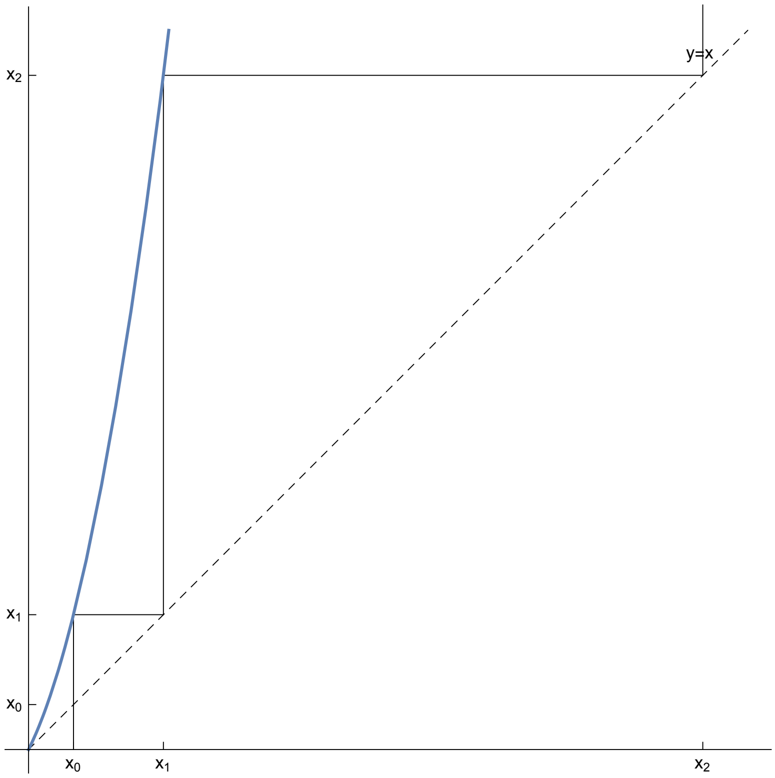
Corrigé de l'exercice 2-4-1 c)

```
Clear[g]; g[x_] := x^2; x0 = 2.;
```
efface

```
NestList[g, x0, 5]
```
liste d'imbrication

$\{2., 4., 16., 256., 65536., 4.29497 \times 10^9\}$

La suite diverge.



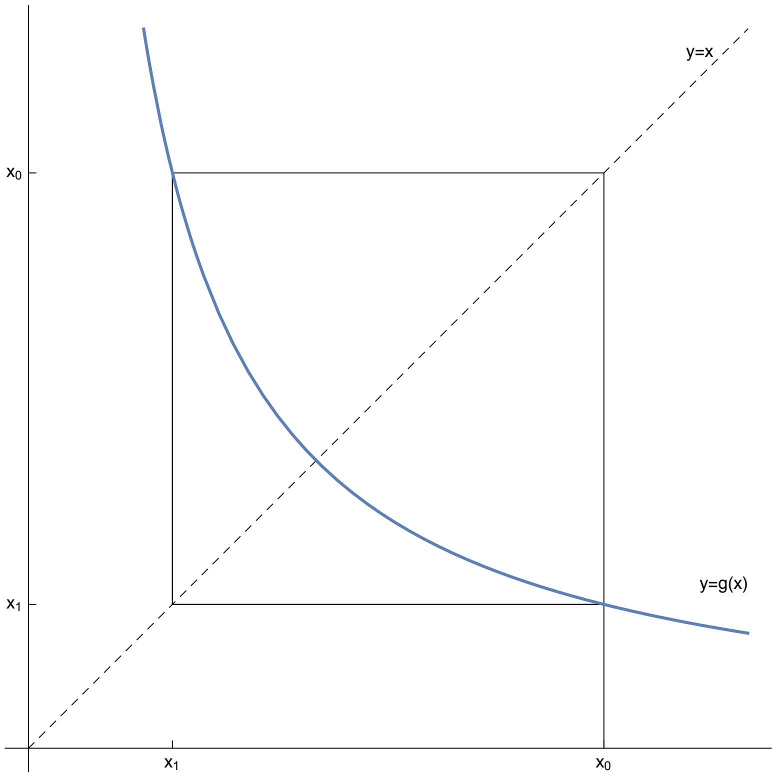
Corrigé de l'exercice 2-4-1 d)

```
Clear[g]; g[x_] := 1/x; x0 = 2.;
```
efface

```
NestList[g, x0, 5]
```
liste d'imbrication

```
{2., 0.5, 2., 0.5, 2., 0.5}
```

La suite ne converge pas.

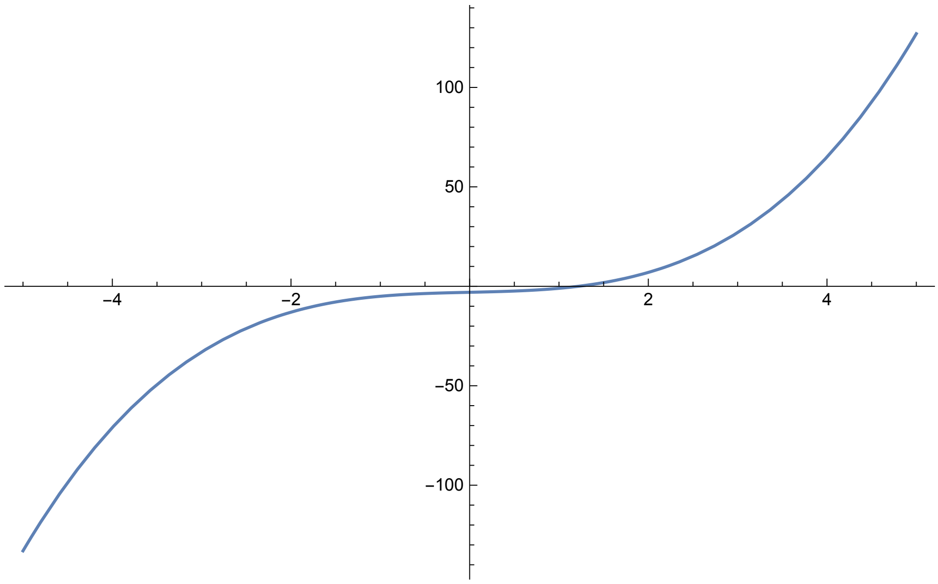


Corrigé de l'exercice 2-4 - 2

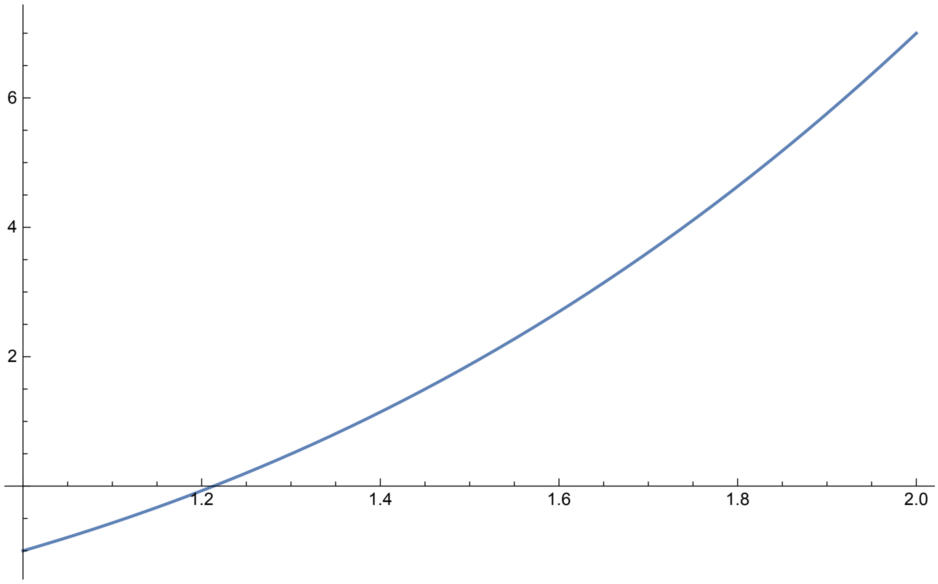
```
Clear[f];
efface
f[x_] := x^3 + x - 3

SetOptions[Plot, AxesOrigin → {Automatic, 0}, ImageSize → {500, 300}];
alloue options  tracé··  origine des axes  automatique  taille d'image

Plot[f[x], {x, -5, 5}]
tracé de courbes
```




```
Plot[f[x], {x, 1, 2}]
tracé de courbes
```



```
a = 1;  b = 1.4; x0 = (a + b)/2;
m = (f[b] - f[a])/(b - a);
Clear[g];
```
efface

```
g[x_] := x - 1/m f[x];
NestList[g, x0, 3]
```
liste d'imbrication

```
{1.2, 1.21343, 1.21341, 1.21341}
```

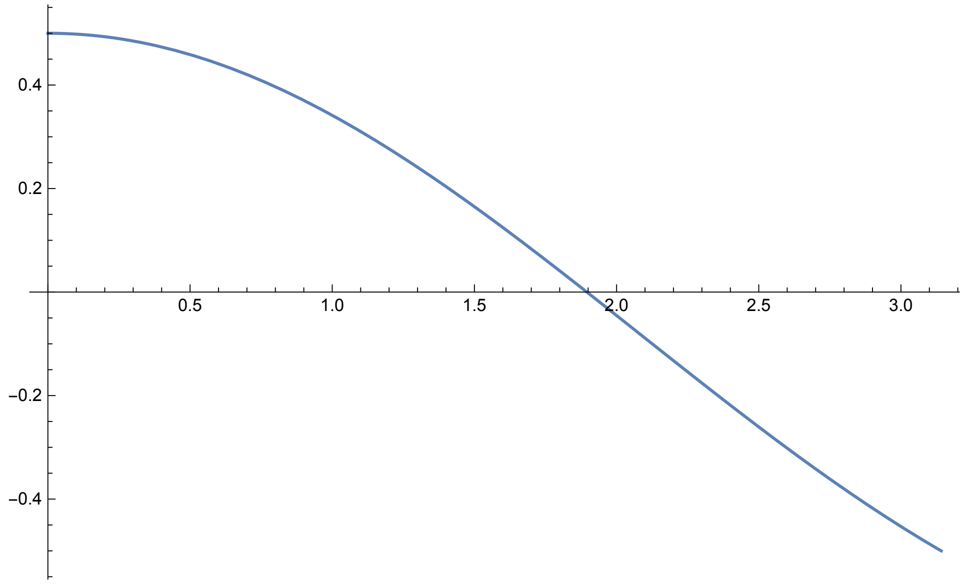
Corrigé de l'exercice 2-4 - 3

```
Clear[f];
effface
```

$$f[x\_] := \frac{\text{Sin}[x]}{x} - 0.5$$

```
SetOptions[Plot, AxesOrigin → {Automatic, 0}, ImageSize → {500, 300}];
alloue options  tracé··  origine des axes  automatique  taille d'image
```

```
Plot[f[x], {x, 0, π}]
tracé de courbes
```



$$a = 1.8;\ b = 2.;\ x0 = \frac{a + b}{2};\ m = \frac{f[b] - f[a]}{b - a};$$

$$\text{Clear}[g];\ g[x\_] := x - \frac{1}{m} f[x];$$

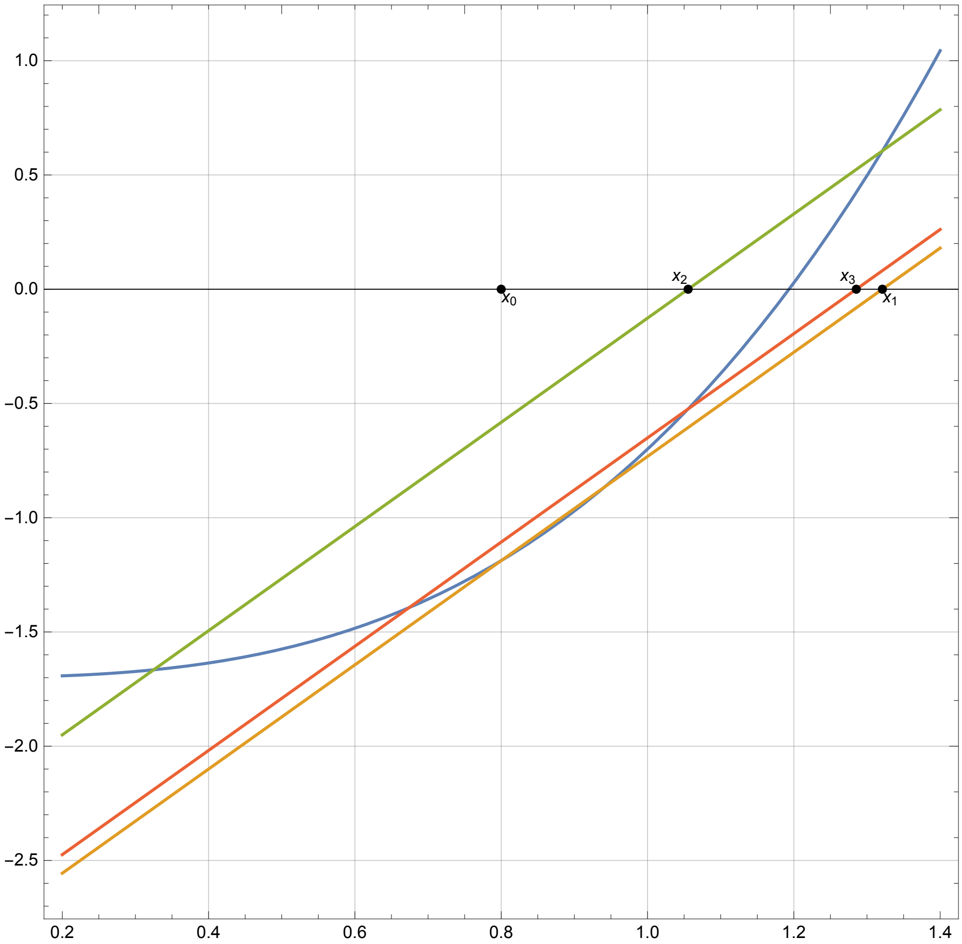
effface

```
NestList[g, x0, 3]
liste d'imbrication
```

{1.9, 1.89549, 1.89549, 1.89549}

Voilà qui est rapide et précis !

Corrigé de l'exercice 2-4 -4



Corrigé de l'exercice 2-4-5

```
Clear[f, g]; f[x_] := 3^x - 7 + x
```
efface

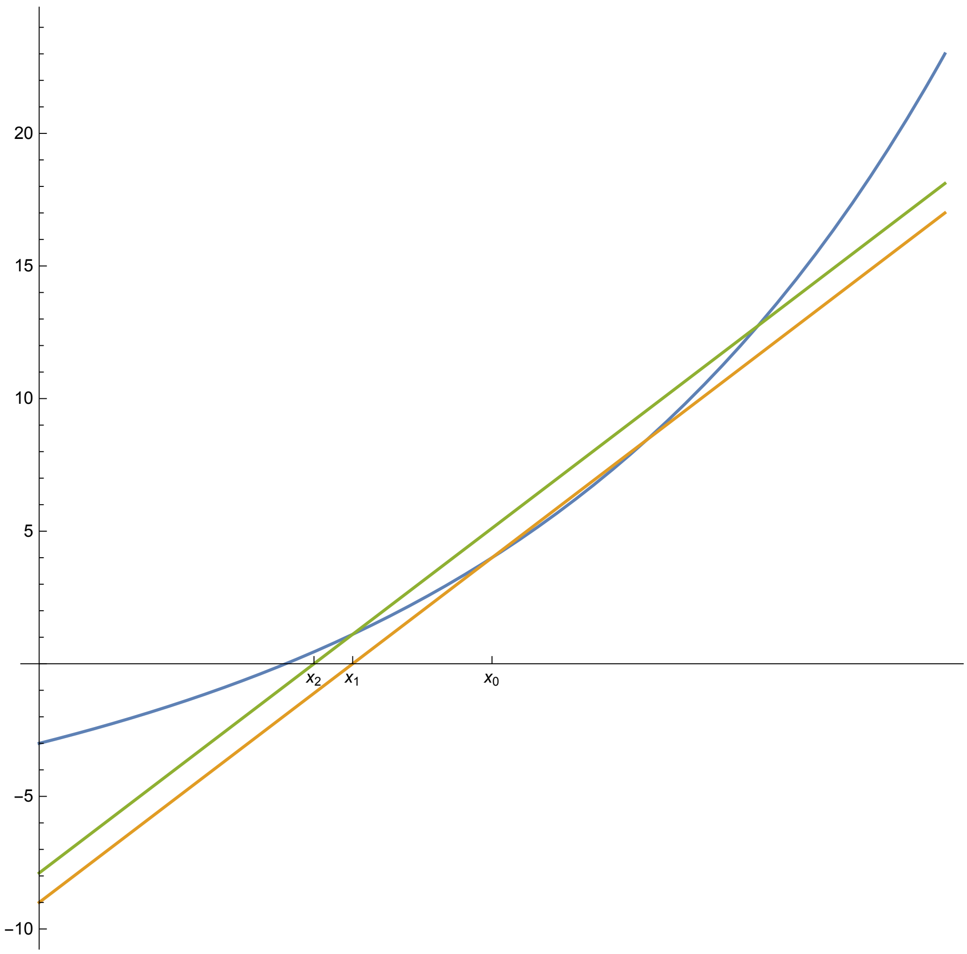
```
a = 1; b = 3;
```
$$m = \frac{f[b] - f[a]}{b - a};\ g[x\_] := x - \frac{1}{m} f[x];$$

$$x0 = \frac{a + b}{2};$$

```
{Sign[f[a]], Sign[f[b]]}
```
signe signe

{-1, 1}

Du point de vue de l'équation $f(x) = 0$



Du point de vue de l'équation $g(x) = x$: