Marcel Délèze
Edition 2017

Thème :§ 2 Equations différentielles ordinaires du deuxième ordre
Lien vers les énoncés des travaux dirigés:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/eq-differentielles/2_EQ-DIFFERENTIELLES.pdf

2.1 TD 1 Corrigé (TD = Travail dirigé)

$$y''(t) = \frac{F}{m}$$

$$\int y''(t)\, dt = \int \frac{F}{m}\, dt$$

$$y'(t) = \frac{F}{m} t + c_1$$

où c_1 est une constante d'intégration dont on peut déterminer la valeur au moyen de la deuxième condition initiale

$$y'(0) = \frac{F}{m} 0 + c_1 = v_0 \qquad \Longrightarrow c_1 = v_0$$

$$y'(t) = \frac{F}{m} t + v_0$$

$$\int y'(t)\, dt = \int \left(\frac{F}{m} t + v_0\right) dt$$

$$y(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{2} t^2 + v_0 t + c_2$$

où c_2 est une constante d'intégration dont on peut déterminer la valeur au moyen de la première condition initiale

$$y(0) = \frac{F}{m} \frac{1}{2} 0^2 + v_0 0 + c_2 = y_0 \qquad \Longrightarrow c_2 = y_0$$

$$\boxed{y(t) = \frac{F}{2m} t^2 + v_0 t + y_0}$$

b) Vérifions la solution:

$$y'(t) = \left(\frac{F}{2m} t^2 + v_0 t + y_0\right)' = \frac{F}{2m} 2t + v_0 + 0 = \frac{F}{m} t + v_0$$

$$y''(t) = \left(\frac{F}{m} t + v_0\right)' = \frac{F}{m}$$

$$y(0) = \frac{F}{2m} 0^2 + v_0 0 + y_0 = y_0$$

c) Cas particulier $F = 0$ (mouvement rectiligne uniforme)

$$y(t) = v_0 t + y_0$$

2.1 TD 2 Corrigé

Calculons les valeurs de ω pour lesquelles la solution de base $y_1(t)$ est solution

$$y_1''(t) + q\, y_1(t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$(\cos(\omega t))'' + q \cos(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$(-\omega \sin(\omega t))' + q \cos(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$\left(-\omega^2 \cos(\omega t)\right) + q \cos(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$\left(-\omega^2 + q\right) \cos(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$-\omega^2 + q = 0 \qquad \text{où} \quad q = \frac{k}{m} > 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{q} \qquad \text{ou} \qquad \omega_2 = -\sqrt{q};$$

$$y_1(t) = \cos\left(\sqrt{q}\, t\right) \qquad \text{ou} \qquad y_1(t) = \cos\left(-\sqrt{q}\, t\right) = \cos\left(\sqrt{q}\, t\right)$$

$$y_1(t) = \cos\left(\sqrt{q}\, t\right)$$

Calculons les valeurs de ω pour lesquelles la solution de base $y_2(t)$ est solution

$$y_2''(t) + q\, y_2(t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$(\sin(\omega t))'' + q \sin(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$(\omega \cos(\omega t))' + q \sin(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$\left(-\omega^2 \sin(\omega t)\right) + q \sin(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$\left(-\omega^2 + q\right) \sin(\omega t) = 0 \qquad \text{pour tout } t$$

$$-\omega^2 + q = 0 \qquad \text{où} \quad q = \frac{k}{m} > 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{q} \qquad \text{ou} \qquad \omega_2 = -\sqrt{q};$$

$$y_2(t) = \sin\left(\sqrt{q}\, t\right) \qquad \text{ou} \qquad y_2(t) = \sin\left(-\sqrt{q}\, t\right) = -\sin\left(\sqrt{q}\, t\right)$$

$$y_2(t) = \sin\left(\sqrt{q}\, t\right) \qquad (\text{le signe sera pris en compte par le coefficients } c_2)$$

Montrons que toute combinaison linéaire des deux solutions de base est solution de l'équation différentielle homogène

$$y''(t) + q\, y(t) = (c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t))'' + q\,(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) =$$
$$(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t))'' + q\,(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) =$$
$$c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t) + q\, c_1 y_1(t) + q\, c_2 y_2(t) =$$
$$c_1 (y_1''(t) + q\, y_1(t)) + c_2 (y_2''(t) + q\, y_2(t)) = c_1\, 0 + c_2\, 0 = 0$$

A partir des conditions initiales, calculons les coefficients c_1, c_2

$$y(0) = c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = c_1 \cos\left(\sqrt{q}\, 0\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{q}\, 0\right) = c_1 = y_0$$

$$y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) =$$
$$c_1 \left(\cos\left(\sqrt{q}\, t\right)\right)' + c_2 \left(\sin\left(\sqrt{q}\, t\right)\right)' = -c_1 \sqrt{q} \sin\left(\sqrt{q}\, t\right) + c_2 \sqrt{q} \cos\left(\sqrt{q}\, t\right)$$

$$y'(0) = -c_1 \sqrt{q} \sin\left(\sqrt{q}\, 0\right) + c_2 \sqrt{q} \cos\left(\sqrt{q}\, 0\right) = c_2 \sqrt{q} = v_0 \qquad \Longrightarrow c_2 = \frac{v_0}{\sqrt{q}}$$

On obtient ainsi la première forme de la solution

$$y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{q}\, t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{q}} \sin\left(\sqrt{q}\, t\right)$$

$$\boxed{y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)}$$

Posons

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\sqrt{q}}\right)^2} = \sqrt{\frac{q\,y_0^2 + v_0^2}{q}}$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}[c_1 + i\,c_2] = \mathrm{Arg}\left[y_0 + i\,\frac{v_0}{\sqrt{q}}\right]$$

On obtient ainsi la deuxième forme de la solution

$$\boxed{y(t) = a\cos\left(\sqrt{q}\;t - \varphi\right) \quad \text{où} \quad a = \sqrt{\frac{q\,y_0^2 + v_0^2}{q}} \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{Arg}\left[y_0 + i\,\frac{v_0}{\sqrt{q}}\right]}$$

Corrigé du travail dirigé 2.2 TD 1 a)

$$y'' - \frac{g}{\ell}\,y = 0$$

L'équation différentielle du deuxième ordre est linéaire homogène à coefficients constants:

$$p = 0; \qquad\qquad q = -\frac{g}{\ell}$$

Puisque $p^2 > q$, il s'agit du cas apériodique. Cherchons des solutions de la forme $y(t) = e^{\lambda t}$

$$\left(e^{\lambda t}\right)'' - \frac{g}{\ell}\,e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda\left(e^{\lambda t}\right)' - \frac{g}{\ell}\,e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2\left(e^{\lambda t}\right) - \frac{g}{\ell}\,e^{\lambda t} = 0$$

$$\left(\lambda^2 - \frac{g}{\ell}\right)e^{\lambda t} = 0$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \frac{g}{\ell} = 0$$

dont les racines sont

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \qquad\qquad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

On obtient deux solutions de base

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}; \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}$$

La solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions

$$y(t) = c_1\,y_1(t) + c_2\,y_2(t) = c_1\,e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t} + c_2\,e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}$$

A partir des conditions initiales, déterminons les constantes c_1 et c_2:

$$y_0 = y(0) = c_1\,e^0 + c_2\,e^0 = c_1 + c_2$$

$$0 = y'(0) = c_1\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,0} + c_2\left(-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,0} = \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)(c_1 - c_2)$$

On obtient

$$c_1 = c_2 = \frac{y_0}{2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{y_0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}\right)}$$

En introduisant la fonction suivante appelée "cosinus hyperbolique" (voir *Formulaires et tables*)

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

notée **Cosh[x]** en *Mathematica*, la solution s'écrit sous la forme plus compacte

$$y(t) = y_0\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

Corrigé du travail dirigé 2.2 TD 1 b)

```
y0 = 1; ℓ = 4; g = 9.81;
```

$$y[t\_] := \frac{y0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t}\right)$$

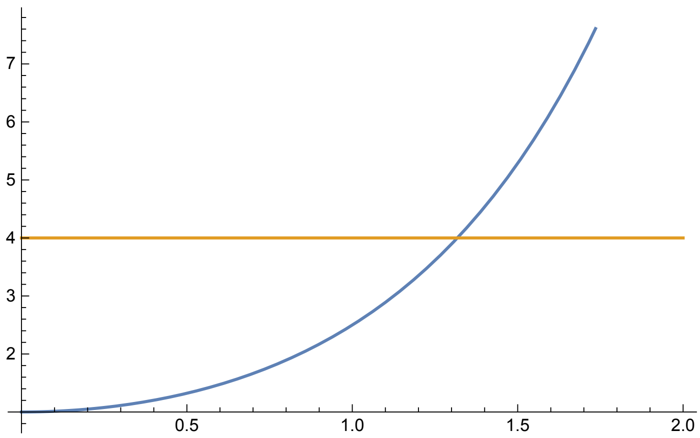
Durée du glissement (en secondes)

```
Solve[y[t] == ℓ, t, Reals]
résous             nombres
```

Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
{{t → -1.31761}, {t → 1.31761}}
```

```
Plot[{y[t], ℓ}, {t, 0, 2}]
tracé de courbes
```




```
es = FindRoot[y[t] == ℓ, {t, 1.3}]
     trouve racine
```

```
{t → 1.31761}
```

Vitesse finale en $\frac{m}{s}$

```
y'[t] /. es
6.06527
```

Corrigé du travail dirigé 2.2 TD 2 a)

Dans un circuit RCL série, on a

$$U_R = R\,I = \text{la chute de tension sur la résistance ohmique;}$$

$$U_C = \frac{1}{C}\,Q = \text{la tension aux bornes du condensateur; elle est proportionnelle à la charge;}$$

$$U_{ind} = -L\,I' = \text{la tension auto–induite aux bornes de la bobine; elle s' oppose aux variations de courants}$$

La loi des boucles de Kirchhoff affirme que la tension électromotrice est égale à la somme des chutes de tensions

$$U_{ind} = U_R + U_C$$

$$-L\,I' = R\,I + \frac{1}{C}\,Q$$

$$L\,I' + R\,I + \frac{1}{C}\,Q = 0$$

$$L\,I'' + R\,I' + \frac{1}{C}\,Q' = 0$$

$$L\,I'' + R\,I' + \frac{1}{C}\,I = 0$$

Corrigé du travail dirigé 2.2 TD 2 b)

$$I'' + \frac{R}{L}\,I' + \frac{1}{L\,C}\,I = 0$$

$$p = \frac{R}{2\,L}; \qquad q = \frac{1}{L\,C}$$

Une oscillation amortie a lieu si et seulement si $p^2 < q$, c'est-à-dire si

$$\frac{1}{L\,C} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2 > 0$$

La fréquence propre du circuit est alors

$$\omega = \sqrt{q - p^2} = \sqrt{\frac{1}{L\,C} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2}$$

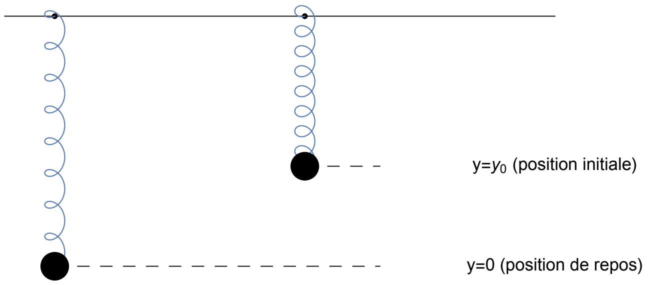
Corrigé du travail dirigé 2.2 TD 2 c)

La solution générale de l'équation différentielle est

$$y(t) = e^{-p\,t}\,(c_1 \cos(\omega\,t) + c_2 \sin(\omega\,t)) =$$

$$e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2}\;t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2}\;t\right)\right)$$

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 1 a)



La loi fondamentale de la dynamique donne

$$m g - k y = m \ddot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y - g = 0$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{y}(0) = 0$$

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 1 b)

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre inhomogène. On s'attend à des oscillations. Selon le § 2.2 du cours, nous savons que l'équation homogène associée

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

possède des solutions de la forme

$$y_{\text{hom}}(t) = e^{-p t} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$

où $p = 0$, $q = \frac{k}{m}$ et $\omega = \sqrt{q - p^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, c'est-à-dire

$$y_{\text{hom}}(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Cherchons maintenant une solution particulière constante

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y - g = 0$$

$$0 + \frac{k}{m} y - g = 0$$

$$y_{\text{part}} = \frac{m g}{k}$$

La solution générale de l'équation inhomogène est

$$y_{\text{gén}}(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \frac{m g}{k}$$

Pour satisfaire les conditions initiales, les constantes doivent vérifier

$$c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + \frac{m g}{k} = y_0 \quad \Longrightarrow c_1 = y_0 - \frac{m g}{k}$$

$$-c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin(0)+c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos(0)=0\quad\Longrightarrow c_2=0$$

Finalement, la solution du système est

$$y(t)=\left(y_0-\frac{m\,g}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)+\frac{m\,g}{k}$$

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 1 c) [facultatif]

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre inhomogène. Pour l'équation homogène associée

$$\ddot{y}+\frac{k}{m}\,y=0,$$

selon le supplément § 2.2 S1 (sur le site internet *Documents Mathematica/Annexes/eq-differentielles/2-2_Equa_diff_Suppl.nb*), nous posons $y(t)=e^{\lambda t}$, ce qui nous donne l'équation caractéristique $\lambda^2+\frac{k}{m}=0$. Après avoir posé $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient les solutions $\lambda_1=i\,\omega$ et $\lambda_2=-i\,\omega$. On trouve

$$\begin{aligned}y_{\text{hom}}(t)&=c_1\,e^{\lambda_1 t}+c_2\,e^{\lambda_2 t}=c_1\,e^{i\,\omega\,t}+c_2\,e^{-i\,\omega\,t}\\&=c_1\,(\cos(\omega\,t)+i\,\sin(\omega\,t))+c_2\,(\cos(\omega\,t)-i\,\sin(\omega\,t))\\&=(c_1+c_2)\,\cos(\omega\,t)+i\,(c_1-c_2)\,\sin(\omega\,t)\end{aligned}$$

Le théorème démontré dans le supplément § 2.2 S1, nous donne la solution réelle

$$\begin{aligned}y_{\text{hom}}(t)&=A\cos(\omega\,t)+B\sin(\omega\,t)\\&=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\end{aligned}$$

La suite du calcul se poursuit comme dans la partie b) ci-dessus.

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 2 a)

Selon la loi de Kirchhoff pour les boucles, on a

$$\frac{Q}{C}+L\,I'=U=\hat{U}\sin(\Omega\,t)$$

Par dérivation, compte tenu de $Q'=I$, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{I}{C}+L\,I''=\hat{U}\,\Omega\cos(\Omega\,t)$$

$$I''+\frac{1}{L\,C}\,I=\frac{\hat{U}\,\Omega}{L}\cos(\Omega\,t)$$

avec les conditions initiales

$$I(0)=I_0\qquad\text{et}\qquad I'(0)=I_1$$

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 2 b)

<u>Solution homogène</u>

Cherchons d'abord des solutions de l'équation homogène associée

$$I'' + \frac{1}{L\,C} I = 0$$

qui, d'après le § 2.2 du cours, sont de la forme

$$I_{hom}(t) = e^{-p\,t}\,(c_1 \cos(\omega\,t) + c_2 \sin(\omega\,t))$$

où $p = 0$, $q = \frac{1}{L\,C}$ et $\omega = \sqrt{q - p^2} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$, c'est-à-dire

$$I_{hom}(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right)$$

Solution particulière

Pour déterminer une solution particulière, cherchons une solution qui est périodique, de même période que l'excitateur, mais qui pourrait être déphasée par rapport à la tension

$$I_{part}(t) = k_1 \cos(\Omega\,t) + k_2 \sin(\Omega\,t)$$

$$I_{part}'(t) = -k_1\,\Omega \sin(\Omega\,t) + k_2\,\Omega \cos(\Omega\,t)$$

$$I_{part}''(t) = -k_1\,\Omega^2 \cos(\Omega\,t) + k_2\,\Omega^2 \sin(\Omega\,t)$$

Cherchons les nombres k_1, k_2 qui vérifient l'équation inhomogène

$$I_{part}''(t) + \frac{1}{L\,C} I_{part}(t) \overset{!}{=} \frac{\hat{U}\,\Omega}{L} \cos(\Omega\,t)$$

$$\left(\frac{1}{L\,C} - \Omega^2\right)(k_1 \cos(\Omega\,t) + k_2 \sin(\Omega\,t)) \overset{!}{=} \frac{\hat{U}\,\Omega}{L} \cos(\Omega\,t)$$

$$k_1 \cos(\Omega\,t) + k_2 \sin(\Omega\,t) \overset{!}{=} \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2} \cos(\Omega\,t)$$

L'égalité devant être vérifiée pour tous les t, il est nécessaire que

$$k_1 = \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2}, \quad k_2 = 0$$

$$I_{part}(t) = \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2} \cos(\Omega\,t)$$

Solution générale

$$I_{gén}(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2} \cos(\Omega\,t)$$

Solution vérifiant les conditions initiales

Pour satisfaire les conditions initiales, les constantes doivent vérifier

$$c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2} \cos(0) = I_0 \quad \Longrightarrow c_1 = I_0 - \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2}$$

$$-c_1 \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \sin(0) + c_2 \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \cos(0) = I_1 \quad \Longrightarrow c_2 = I_1 \sqrt{L\,C}$$

Finalement, la solution du système est

$$I(t) = \left(I_0 - \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + I_1 \sqrt{L\,C}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + \frac{\hat{U}\,C\,\Omega}{1 - L\,C\,\Omega^2} \cos(\Omega\,t)$$

<u>Application numérique</u>

$$\texttt{donnee} = \{L \to 100,\ c \to 10^{-4},\ \Omega \to 0.1,\ U \to 3000,\ I0 \to 0,\ I1 \to 1\};$$

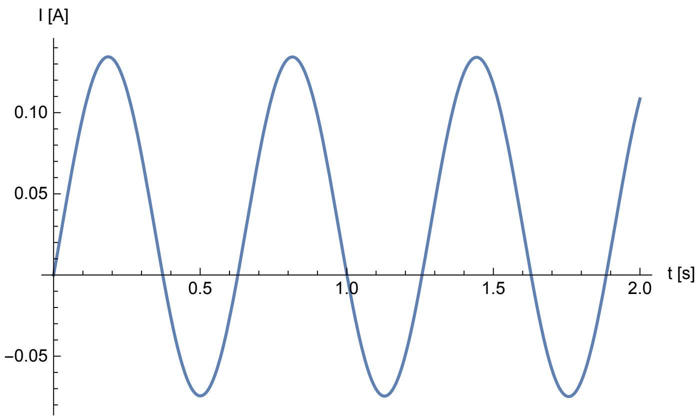
$$\texttt{i[t\_]} = \left(I0 - \frac{U\,c\,\Omega}{1 - L\,c\,\Omega^2}\right) \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{\sqrt{L\,c}}\,t\right] + I1\,\sqrt{L\,c}\ \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{\sqrt{L\,c}}\,t\right] + \frac{U\,c\,\Omega}{1 - L\,c\,\Omega^2}\,\mathrm{Cos}[\Omega\,t]\ \texttt{/. donnee}$$

cosinus sinus cosinus

$$0.030003\,\mathrm{Cos}[0.1\,t] - 0.030003\,\mathrm{Cos}[10\,t] + \frac{1}{10}\,\mathrm{Sin}[10\,t]$$

```
Plot[i[t], {t, 0, 2}, AxesLabel → {"t [s]", "I [A]"}]
```

tracé de courbes titre d'axe unité imagina



Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 2 c)

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre inhomogène. Pour l'équation homogène associée

$$I'' + \frac{1}{L\,C}\,I = 0$$

selon la partie S1 du supplément

https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud//eq-differentielles/annexes/2-2-equadiff-suppl.pdf

nous posons $I(t) = e^{\lambda t}$, ce qui nous donne l'équation caractéristique $\lambda^2 + \frac{1}{L\,C} = 0$. Après avoir posé $\omega = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$, on obtient les solutions $\lambda_1 = i\,\omega$ et $\lambda_2 = -i\,\omega$. On trouve

$$\begin{aligned} I_{hom}(t) &= c_1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\,e^{\lambda_2 t} = c_1\,e^{i\,\omega\,t} + c_2\,e^{-i\,\omega\,t} \\ &= c_1\,(\cos(\omega\,t) + i\,\sin(\omega\,t)) + c_2\,(\cos(\omega\,t) - i\,\sin(\omega\,t)) \\ &= (c_1 + c_2)\,\cos(\omega\,t) + i\,(c_1 - c_2)\,\sin(\omega\,t) \end{aligned}$$

Le théorème démontré dans le supplément § 2.2 S1, nous donne la solution réelle

$$\begin{aligned} I_{hom}(t) &= A\cos(\omega\,t) + B\sin(\omega\,t) \\ &= A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) \end{aligned}$$

La suite du calcul se poursuit comme dans la partie b) ci-dessus.

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 3 a)

<u>1-er pas : Solution générale de l'équation homogène</u>

$$y'' - \frac{(1+\mu)\,g}{\ell}\,y = 0 \qquad \text{où on pose} \quad y(t) = e^{\lambda t}$$

$$\left(e^{\lambda t}\right)'' - \frac{(1+\mu)\,g}{\ell}\,e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda\left(e^{\lambda t}\right)' - \frac{(1+\mu)\,g}{\ell}\,e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2\,e^{\lambda t} - \frac{(1+\mu)\,g}{\ell}\,e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2 - \frac{(1+\mu)\,g}{\ell}\right) = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{(1+\mu)\,g}{\ell} = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}$$

On obtient deux solutions de base

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t}; \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t}$$

La solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions

$$y_{hom}(t) = c_1\,y_1(t) + c_2\,y_2(t) = c_1\,e^{\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t} + c_2\,e^{-\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t}$$

<u>2-ème pas : une solution particulière de l'équation inhomogène</u>

L'équation inhomogène possède une solution constante.

$$y'' - \frac{(1+\mu)\,g}{\ell}\,y = -\mu\,g \qquad \text{où on pose} \quad y''(t) = 0$$

$$-\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}\,y = -\mu\,g$$

$$\frac{1+\mu}{\ell}\,y = \mu$$

$$y_{part}(t) = \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}$$

<u>3-ème pas : la solution générale de l'équation inhomogène</u>

$$y_{gén}(t) = y_{hom}(t) + y_{part}(t) = c_1\,e^{\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t} + c_2\,e^{-\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t} + \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}$$

<u>4-ème pas : solution particulière pour les conditions initiales données</u>

A partir des conditions initiales, déterminons les constantes c_1 et c_2:

$$y_0 = y(0) = c_1\,e^0 + c_2\,e^0 + \frac{\mu\,\ell}{1+\mu} = c_1 + c_2 + \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}$$

$$0 =$$

$$y'(0) = c_1\left(\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\right)e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,0} + c_2\left(-\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\right)e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,0} + 0 = \left(\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\right)(c_1 - c_2)$$

On obtient

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}\right)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}\right)\left(e^{\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t}\right) + \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}}$$

En introduisant la fonction suivante appelée "cosinus hyperbolique"

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

notée **Cosh[x]** en *Mathematica*, la solution s'écrit sous la forme plus compacte

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}\right)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\;t\right) + \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}$$

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 3 b)

```
y0 = 1; ℓ = 4; g = 9.81; μ = 0.3;
```

$$y[t\_] := \frac{1}{2}\left(y0 - \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}\right)\left(e^{\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{(1+\mu)\,g}{\ell}}\,t}\right) + \frac{\mu\,\ell}{1+\mu}$$

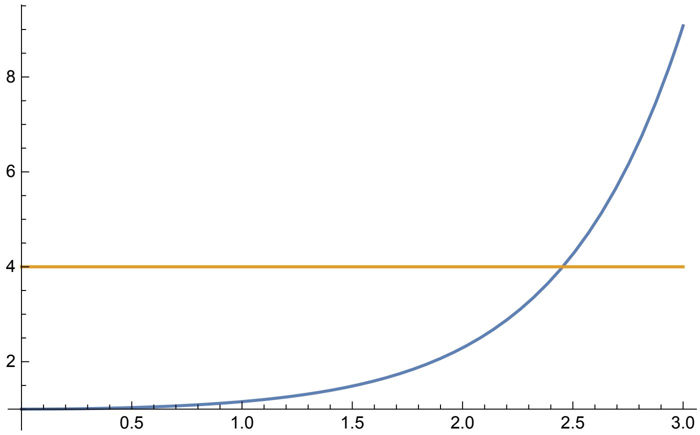
Durée du glissement (en secondes)

```
Solve[y[t] == ℓ, t, Reals]
```
résous nombres

... Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
{{t → -2.45405}, {t → 2.45405}}
```

```
Plot[{y[t], ℓ}, {t, 0, 3}]
```
tracé de courbes




```
es = FindRoot[y[t] == ℓ, {t, 2.5}]
```
trouve racine

```
{t → 2.45405}
```

Vitesse finale en $\frac{m}{s}$

```
y'[t] /. es
```

5.49234

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 4 a)

Dans un circuit RCL série, on a

$U_R = R\,I$ = la chute de tension sur la résistance ohmique;

$U_C = \frac{1}{C} Q$ = la tension aux bornes du condensateur; elle est proportionnelle à la charge;

$U_{ind} = -L\,I'$ = la tension autoinduite aux bornes de la bobine;
elle s'oppose aux variations de courants

$U_{gén} = U_0 \sin(\Omega\, t)$ = la tension délivrée par le générateur;

La loi des boucles de Kirchhoff affirme que la tension électromotrice est égale à la somme des chutes de tensions

$$U_{gén} + U_{ind} = U_R + U_C$$

$$U_0 \sin(\Omega\, t) - L\,I' = R\,I + \frac{1}{C} Q$$

$$L\,I' + R\,I + \frac{1}{C} Q = U_0 \sin(\Omega\, t)$$

$$L\,I'' + R\,I' + \frac{1}{C} Q' = (U_0 \sin(\Omega\, t))'$$

$$L\,I'' + R\,I' + \frac{1}{C} I = \Omega \cos(\Omega\, t)$$

Corrigé du travail dirigé 2.3 TD 4 b)

$$I_\infty(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \left(\frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \cos(\Omega\, t) + \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \sin(\Omega\, t) \right)$$

$$f[t\_] := \frac{U0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \left(\frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \mathrm{Cos}[\Omega\, t] + \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \mathrm{Sin}[\Omega\, t] \right)$$

cosinus sinus

$$\mathrm{Simplify}\left[L\,f''[t] + R\,f'[t] + \frac{1}{C} f[t] - \Omega\, U0\, \mathrm{Cos}[\Omega\, t]\right]$$

simplifie cosinus

0