Marcel Délèze
Edition 2017

Thème :§ 1.1 Equations différentielles ordinaires
Lien vers les énoncés des travaux dirigés:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/eq-differentielles/1-1_EQ-DIFFERENTIELLES.pdf

Corrigé de 1.1 - TD 1 : Croissance dont le taux par unité de temps est constant

```
Clear[r, n, t, T, λ];
efface
```

```
SetOptions[Plot, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0}, Prolog -> PointSize[0.016],
  PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "A[t]/A[0]"}, ImageSize → {500, 300}];
alloue options | tracé·· | axes | vrai | origine des axes | prologue | taille des points | tout | titre d'axe | taille d'image
```

Première étape : suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Comme étudié dans le cadre des intérêts composés, considérons une quantité $A(t)$ qui, à chaque durée T, diminue de moitié

$$A(T) = A(0)\,\frac{1}{2}$$

$$A(2T) = A(T)\,\frac{1}{2} = A(0)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

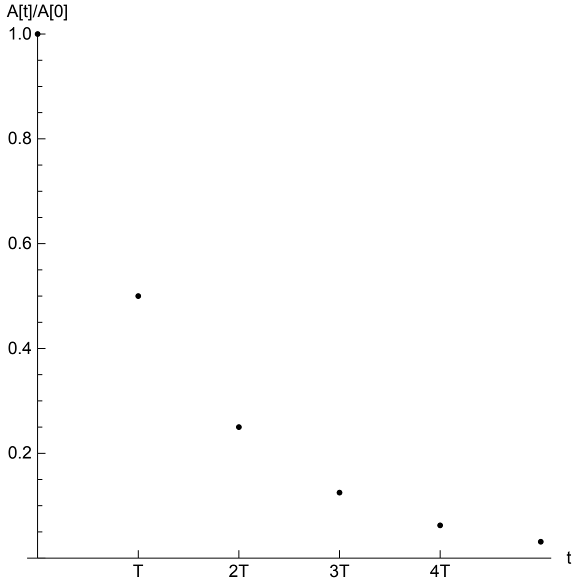
$$A(3T) = A(2T)\,\frac{1}{2} = A(0)\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

La suite $n \mapsto A(n\,T)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$\boxed{A(n\,T) = A(0)\left(\frac{1}{2}\right)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

```
Show[Graphics[{Table[Point[{n 12, (1/2)^n}], {n, 0, 5}]}],
 Ticks → {{{12, "T"}, {2 × 12, "2T"}, {3 × 12, "3T"}, {4 × 12, "4T"}}, Automatic},
 Axes → True, AxesLabel → {"t", "A[t]/A[0]"}, AspectRatio → 1, PlotRange → {0, 1}]
```

mon·· graphique table point graduations automatique axes vrai titre d'axe rapport d'aspect zone de tracé



<u>Deuxième étape : fonction exponentielle de base *r*</u>

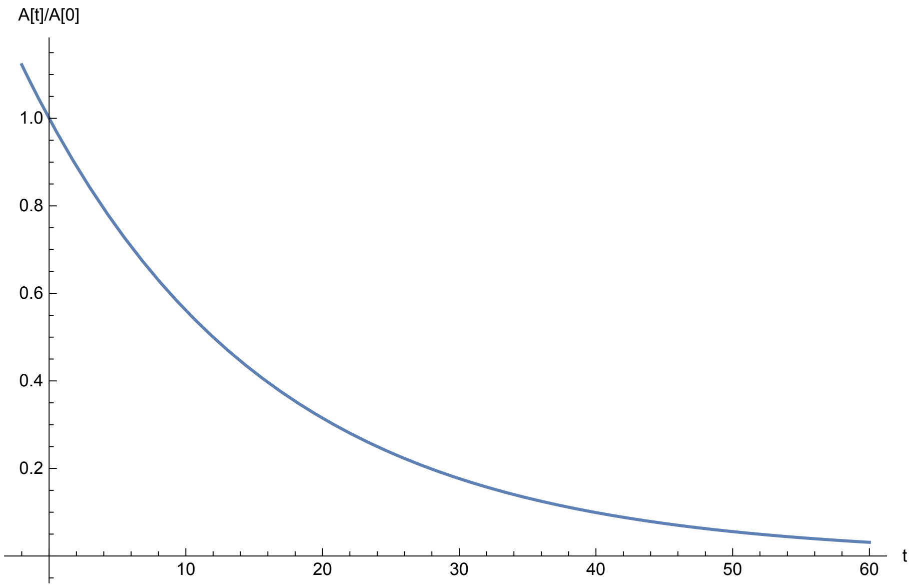
$$A(nT) = A(0)\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Considérons maintenant que la variable $t = n\,T$ est réelle, c'est-à-dire $n = \frac{t}{T}$ continue.

$$A(t) = A(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = A(0)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}\right)^t = A(0)\,r^t \qquad \text{où} \quad \boxed{r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}}$$

```
T = 12; r = 0.5`^(1/T); Plot[r^t, {t, -2, 60}]
```

tracé de courbes



Par définition, le taux d'accroissement par unité de temps est le rapport $i = \frac{\text{accroissement par unité de temps}}{\text{valeur}}$

$$i = \frac{A(t+1) - A(t)}{A(t)} = \frac{A(0)\, r^{t+1} - A(0)\, r^t}{A(0)\, r^t} = \frac{r^{t+1} - r^t}{r^t} = \frac{r^{t+1}}{r^t} - \frac{r^t}{r^t} = r - 1$$

Le taux i est donc constant.

<u>Troisème étape : fonction exponentielle de base *e*</u>

Passons de l'exponentielle de base *r* à l'exponentielle de base e

$$A(t) = A(0)\, r^t$$

$$\frac{A(t)}{A(0)} = r^t$$

$$\ln\left(\frac{A(t)}{A(0)}\right) = \ln\left(r^t\right)$$

$$\ln\left(\frac{A(t)}{A(0)}\right) = t \ln(r)$$

$$\exp\left(\ln\left(\frac{A(t)}{A(0)}\right)\right) = \exp(t \ln(r))$$

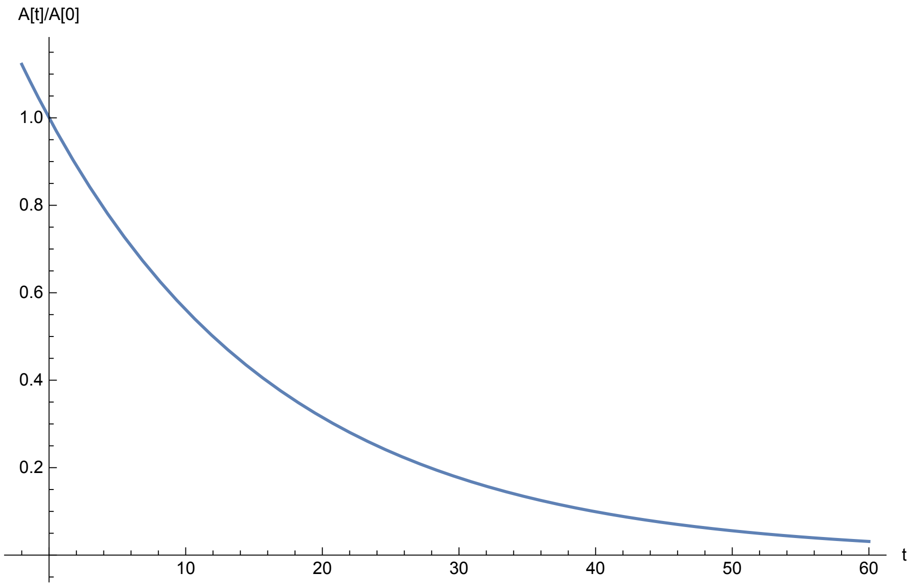
$$\frac{A(t)}{A(0)} = e^{t \ln(r)}$$

$$\boxed{A(t) = A(0)\, e^{\lambda t}}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{\lambda = \ln(r)}$$

Cette formulation est équivalente à la précédente

```
T = 12; r = 0.5`^(1/T); λ = Log[r]; Plot[e^(λ t), {t, -2, 60}]
```

logarit··· tracé de courbes



<u>Quatrième étape : équation différentielle d'une grandeur *A*(*t*) qui varie selon un taux constant</u>

$$A(t) = A(0)\, e^{\lambda t}$$

Calculons la dérivée

$$A'(t) = A(0)\, \lambda\, e^{\lambda t} = \lambda A(t)$$

L'équation différentielle est

$$A'(t) = \lambda A(t) \qquad \text{où } \lambda \text{ est une constante}$$

Retenons le résultat :

```
Si une grandeur A varie selon un taux par unité de temps i constant,
alors la dérivée de A est proportionnelle à A.
```

Cette équation différentielle possède une infinité de solutions, par exemple,

$$A(t) = e^{\lambda t}$$
$$A(t) = 2\, e^{\lambda t}$$
$$A(t) = \pi\, e^{\lambda t}$$

Pour obtenir une solution unique, on ajoute une condition initiale

$A(0) = A_0$ où A_0 est une valeur initiale donnée

Le problème de croissance à taux constant peut maintenant être récrit sous la forme d'une équation différentielle avec condition initiale

$$\boxed{\begin{array}{l} A'(t) = \lambda A(t) \\ A(0) = A_0 \end{array}}$$

où λ et A_0 sont des constantes données par exemple $\lambda = \ln(1 + i)$.
La solution de ce système est la fonction

$$A(t) = A_0\, e^{\lambda t}$$

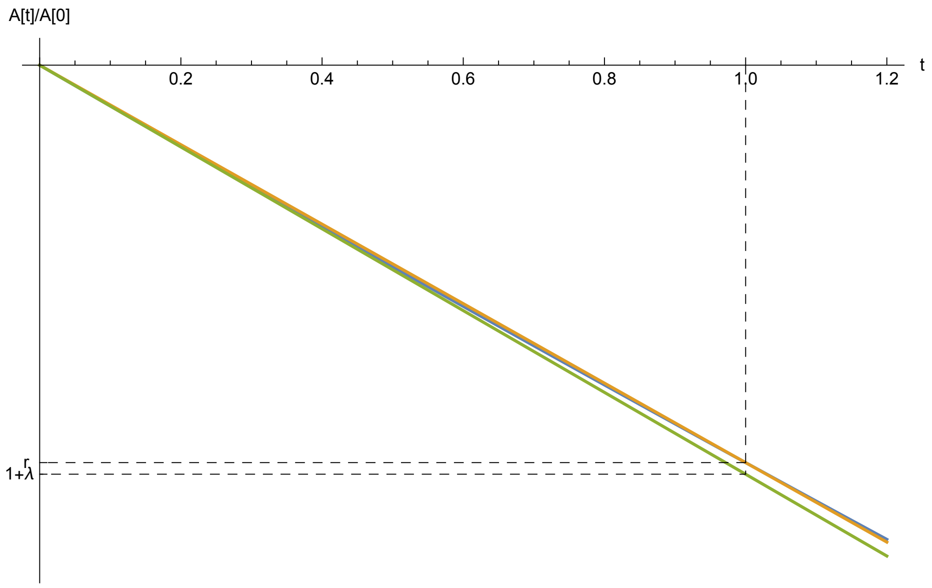
<u>Cinquième étape : interprétation géométrique du taux et de la dérivée</u>

Dans le graphique ci-dessous sont représentées

la fonction exponentielle $A(t) = A_0\, e^{\lambda t}$

la droite sécante qui passe par les points $(0, A(0))$ et $(1, A(1))$ dont la pente est i

la droite qui est tangente à A en 0 dont la pente est $\lambda = \ln(r) = \ln(1 + i)$



$$\lambda = \ln(r) = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}\right) = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\ln(2)}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\lambda = -\frac{\ln(2)}{T}}$$

Numériquement, les valeurs de i, λ sont ici

```
{i, λ}
{-0.0561257, -0.0577623}
```

Corrigé de 1.1 TD 2

Le taux d'accroissement relatif de $f(t) = c\,r^t$ sur l'intervalle $[t,\ t+\Delta t]$ est indépendant de t car

$$\frac{f(t+\Delta)-f(t)}{\Delta t\, f(t)} = \frac{c\,r^{t+\Delta t}-c\,r^t}{\Delta t\, c\, r^t} = \frac{r^{t+\Delta t}-r^t}{\Delta t\, r^t} = \frac{r^t\,(r^{\Delta t}-1)}{\Delta t\, r^t} = \frac{r^{\Delta t}-1}{\Delta t}$$

Le taux d'accroissement relatif de $g(t) = a\,e^{\lambda t}$ sur l'intervalle $[t,\ t+\Delta t]$ est indépendant de t car

$$\frac{g(t+\Delta)-g(t)}{\Delta t\, g(t)} = \frac{a\,e^{\lambda(t+\Delta t)}-a\,e^{\lambda t}}{\Delta t\, a\, e^{\lambda t}} = \frac{e^{\lambda(t+\Delta t)}-e^{\lambda t}}{\Delta t\, e^{\lambda t}} = \frac{e^{\lambda t}\,(e^{\lambda\Delta t}-1)}{\Delta t\, e^{\lambda t}} = \frac{e^{\lambda\Delta t}-1}{\Delta t}$$

Le taux d'accroissement relatif de $f(t) = c\,r^t$ à l'instant t est indépendant de t car

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{c\,(r^t)'}{c\,r^t} = \frac{(r^t)'}{r^t} = \frac{\ln(r)\,r^t}{r^t} = \ln(r)$$

Le taux d'accroissement relatif de $g(t) = a\,e^{\lambda t}$ à l'instant t est indépendant de t car

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{a\,(e^{\lambda t})'}{a\,e^{\lambda t}} = \frac{(e^{\lambda t})'}{e^{\lambda t}} = \frac{\lambda\,e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} = \lambda$$

Corrigé de 1.1 TD 3

1.1- TD 3 Fonction dont la dérivée est proportionnelle à la fonction

Hypothèses

$$a'(t) = a(t) \quad \text{où} \quad a(t) \neq 0$$
$$a(0) = 1$$

Il s'agit d'une équation différentielle avec condition initiale que nous allons résoudre :

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = 1$$
$$\int \frac{a'(t)}{a(t)}\,dt = \int 1\,dt$$
$$\ln(|a(t)|) = t + c \quad \text{où} \quad c \ \text{est une constante réelle}$$
$$\exp(\ln|a(t)|) = \exp(t + c)$$
$$|a(t)| = e^{t+c}$$
$$|a(t)| = e^c\, e^t \quad \text{où} \quad e^c \ \text{est une constante positive}$$
$$a(t) = a_0\, e^t \quad \text{où} \quad a_0 \ \text{est une constante réelle non nulle} \quad (a_0 = \pm\, e^c)$$
$$a(0) = a_0\, e^0 = a_0 = 1$$
$$\boxed{a(t) = e^t}$$

Hypothèses

$$b'(t) = b(t) \quad \text{où} \quad b(t) \neq 0$$
$$b(0) = 2$$

Il s'agit d'une équation différentielle avec condition initiale que nous allons résoudre :

$$\frac{b'(t)}{b(t)} = 1$$

$$\int \frac{b'(t)}{b(t)} \, dt = \int 1 \, dt$$

$\ln(|b(t)|) = t + c$ où c est une constante réelle

$$\exp(\ln|b(t)|) = \exp(t + c)$$

$$|b(t)| = e^{t+c}$$

$|b(t)| = e^c \, e^t$ où e^c est une constante positive

$b(t) = b_0 \, e^t$ où b_0 est une constante réelle non nulle $(b_0 = \pm e^c)$

$$b(0) = b_0 \, e^0 = b_0 = 2$$

$$\boxed{b(t) = 2 \, e^t}$$

Hypothèses

$c'(t) = \frac{4}{3} c(t)$ où $c(t) \neq 0$

$$c(0) = \frac{1}{8}$$

Il s'agit d'une équation différentielle avec condition initiale que nous allons résoudre :

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{4}{3}$$

$$\int \frac{c'(t)}{c(t)} \, dt = \int \frac{4}{3} \, dt$$

$\ln(|c(t)|) = \frac{4}{3} t + k$ où k est une constante réelle

$$\exp(\ln|c(t)|) = \exp\left(\frac{4}{3} t + k\right)$$

$$|c(t)| = e^{\frac{4}{3} t + k}$$

$|c(t)| = e^k \, e^{\frac{4}{3} t}$ où e^k est une constante positive

$c(t) = c_0 \, e^{\frac{4}{3} t}$ où c_0 est une constante réelle non nulle $(c_0 = \pm e^k)$

$$c(0) = c_0 \, e^0 = c_0 = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{c(t) = \frac{1}{8} \, e^{\frac{4}{3} t}}$$

$d'(t) = -\frac{1}{4} d(t)$ où $d(t) \neq 0$

$$d(0) = 100$$

Il s'agit d'une équation différentielle avec condition initiale que nous allons résoudre :

$$\frac{d'(t)}{d(t)} = -\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{d'(t)}{d(t)} \, dt = -\int \frac{1}{4} \, dt$$

$$\ln(|d(t)|) = -\frac{1}{4}t + c \quad \text{où } c \text{ est une constante réelle}$$

$$\exp(\ln|d(t)|) = \exp\left(-\frac{1}{4}t + c\right)$$

$$|d(t)| = e^{-\frac{1}{4}t+c}$$

$$|d(t)| = e^{c}\, e^{-\frac{1}{4}t} \quad \text{où } e^{c} \text{ est une constante positive}$$

$$d(t) = d_0\, e^{-\frac{1}{4}t} \quad \text{où } d_0 \text{ est une constante réelle non nulle } (d_0 = \pm e^{c})$$

$$d(0) = d_0\, e^{0} = d_0 = 100$$

$$\boxed{d(t) = 100\, e^{-\frac{1}{4}t}}$$

Corrigé de 1.1 TD 4

a)

Dans l'équation

$$m\,g - V\rho\,g - k\,v = m\,a$$

remplaçons *a* par la dérivée de *v* puis isolons *v′*

$$m\,g - V\rho\,g - k\,v = m\,v'$$

$$v' = -\frac{k}{m}v + \left(g - \frac{V\rho\,g}{m}\right)$$

La condition initiale est

$$v(0) = 0$$

L'équation différentielle avec condition initiale est donc

$$\boxed{\begin{array}{c} v' = -\frac{k}{m}v + \left(g - \frac{V\rho\,g}{m}\right) \\ v(0) = 0 \end{array}}$$

b)

Vérifions que la fonction donnée est solution. D'une part,

$$v'(t) = \frac{m\,g - V\rho\,g}{k}(-1)\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k\,t}{m}} = \frac{m\,g - V\rho\,g}{m}\,e^{-\frac{k\,t}{m}}$$

D'autre part,

$$-\frac{k}{m}v(t) + \left(g - \frac{V\rho\,g}{m}\right) = -\frac{k}{m}\left(\frac{m\,g - V\rho\,g}{k}\left(1 - e^{-\frac{k\,t}{m}}\right)\right) + \left(g - \frac{V\rho\,g}{m}\right) =$$
$$-\left(\frac{m\,g - V\rho\,g}{m}\left(1 - e^{-\frac{k\,t}{m}}\right)\right) + \left(g - \frac{V\rho\,g}{m}\right) = \frac{m\,g - V\rho\,g}{m}\,e^{-\frac{k\,t}{m}}$$

Pour la condition initiale

$$v(0) = \frac{m\,g - V\rho\,g}{k}\left(1 - e^{0}\right) = 0$$

c)

Pour déterminer une solution constante, cherchons s'il existe une solution telle que

$$v'(t) = 0$$

Remplaçons dans l'équation différentielle

$$0 = -\frac{k}{m} v(t) + \left(g - \frac{V \rho g}{m}\right)$$

$$\frac{k}{m} v(t) = \frac{m g - V \rho g}{m}$$

$$v(t) = \frac{m}{k} \frac{m g - V \rho g}{m} = \frac{m g - V \rho g}{k}$$

Cette fonction constante est donc solution.

La vitesse initiale n'est généralement pas nulle

$$v(0) = \frac{m g - V \rho g}{k}$$

La vitesse $\frac{m g - V \rho g}{k}$ peut être interprétée comme "vitesse limite de chute" : après un certain temps, la vitesse du corps donnée dans la partie b) devient à peu près constante et vaut

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{(m - V \rho) g}{k} \left(1 - e^{-\frac{k t}{m}}\right) = \frac{m g - V \rho g}{k}$$

Corrigé de 1.1 TD 5

Partie a)

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

Calculons le membre de gauche

$$f'(x) = \left((1 - x)^{-1}\right)' = (-1)\,(1 - x)^{-2}\,(1 - x)' = \frac{-1}{(1 - x)^2}\,(-1) = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Calculons le membre de droite

$$f^2(x) = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^2$$

Donc $f'(x) = f^2(x)$.

$$f(0) = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$f(x)$ est bien solution de l'équation différentielle avec condition initiale.

Partie b)

$$f(x) = \sqrt{2}\,\sqrt{2 + x}$$

Calculons le membre de gauche

$$f'(x) = \sqrt{2}\,\left((2 + x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}\,(2 + x)^{-\frac{1}{2}}\,(2 + x)' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 + x}}\,1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2 + x}}$$

Calculons le membre de droite

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}\ \sqrt{2+x}}$$

Donc $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$$f(0) = \sqrt{2}\ \sqrt{2+0} = 2 \neq 1$$

$f(x)$ n'est pas solution de l'équation différentielle avec condition initiale.

Partie c)

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2\,x\,c + c^2\right)$$

Calculons le membre de gauche

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2\,x\,c + c^2\right)' = \frac{1}{4}\,(2\,x - 2\,c) = \frac{x-c}{2}$$

Calculons le membre de droite

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2 - 2\,x\,c + c^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\,(x-c)^2} = \frac{|\,x-c\,|}{2}$$

Donc $f'(x) = \sqrt{f(x)}$ pour $x \geq c$.

$$f(0) = \frac{1}{4}\left(0^2 - 2 \times 0\,c + c^2\right) = \frac{c^2}{4} = 1 \text{ donc } c = -2 \quad \text{ou} \quad c = 2$$

Choisissons $c = -2$

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 + 4\,x + 4\right) = \frac{1}{4}\,x^2 + x + 1 \qquad \text{pour } x \geq -2$$