Marcel Délèze
Edition 2017

Thème : § 1 Projections parallèles
Lien vers les énoncés des exercices:
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/ajustements/1_proj_parall.pdf

Corrigé de l'exercice 1.1 - 1

$$\overrightarrow{AP} = r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2} + r_3\,\vec{h}$$

```
a = {0, 0, 2};
g1 = {0, 3, -2};
g2 = {4, 3, -2};
h = {1, 2, 5};
m = Transpose[{g1, g2, h}];
     transposée
NullSpace[m]
espace nul
```

{ }

$$\overrightarrow{AP_G} = r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2}$$

```
p = {2, 5, 7}; r = LinearSolve[m, p - a]; pg = a + r[[1]] g1 + r[[2]] g2
                   résous équation linéaire
```

$$\left\{\frac{13}{19}, \frac{45}{19}, \frac{8}{19}\right\}$$

Corrigé de l'exercice 1.1 - 2

$$\overrightarrow{BP} = r_1\,\vec{h} + r_2\,\overrightarrow{g_1} + r_3\,\overrightarrow{g_2}$$

```
b = {0, 1, -6};
h = {1, 2, 5};
g1 = {0, 3, -2};
g2 = {4, 3, -2};
m = Transpose[{h, g1, g2}];
     transposée
NullSpace[m]
espace nul
```

{ }

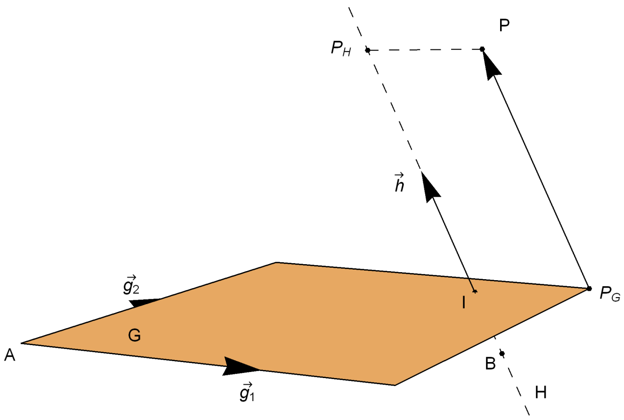
$$\overrightarrow{BP_H} = r_1\,\vec{h}$$

```
p = {2, 5, 7}; r = LinearSolve[m, p - b]; ph = b + r[[1]] h
                   résous équation linéaire
```

$$\left\{\frac{47}{19}, \frac{113}{19}, \frac{121}{19}\right\}$$

Corrigé de l'exercice 1.1 - 3

Voici le schéma de la situation, c'est-à-dire l'intersection du sous-espace affine *G* de dimension 2 et du sous-espace affine *H* de dimension 1 (sans tenir compte des données numériques, sous l'hypothèse que *H* n'est pas parallèle à *G*).



I appartient au sous-espace affine G de base $(A, \vec{g_1}, \vec{g_2})$:

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2}$$

I appartient au sous-espace affine H de base $(B, \vec{h})$:

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OB} + r_3 \vec{h}$$

Point d'intersection I:

$$\overrightarrow{OA} + r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{OB} + r_3 \vec{h}$$

$$r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} - r_3 \vec{h} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$r_1 \overrightarrow{g_1} + r_2 \overrightarrow{g_2} - r_3 \vec{h} = \overrightarrow{AB}$$

```
a = {0, 0, 2};
b = {0, 1, -6};
g1 = {0, 3, -2};
g2 = {4, 3, -2};
h = {1, 2, 5};
m = Transpose[{g1, g2, h}];
    transposée
NullSpace[m]
espace nul
```

{}

```
r = LinearSolve[m, b - a]; i = b - r[[3]] h
    résous équation linéaire
```

$$\left\{\frac{22}{19}, \frac{63}{19}, -\frac{4}{19}\right\}$$

Relation (voir schéma):

$$\boxed{\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IP_G} + \overrightarrow{IP_H}}$$

Vérification numérique

```
p = {2, 5, 7};
```

$$pg = \left\{\frac{13}{19}, \frac{45}{19}, \frac{8}{19}\right\};$$

$$ph = \left\{\frac{47}{19}, \frac{113}{19}, \frac{121}{19}\right\};$$

$$i = \left\{\frac{22}{19}, \frac{63}{19}, -\frac{4}{19}\right\};$$

```
p - i == (pg - i) + (ph - i)
True
```

Corrigé de l'exercice 1.2 - 1

Pour tout le problème, on a

$$\vec{v} = r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + r_p\,\overrightarrow{g_p} + r_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} + r_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} + \ldots + r_n\,\overrightarrow{h_p}$$

La projection de $\vec{v}$ sur G parallèlement à H est

$$p_G\,(\vec{v}) = r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + r_p\,\overrightarrow{g_p}$$

La projection de $\vec{v}$ sur H parallèlement à G est

$$p_H\,(\vec{v}) = r_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} + r_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} + \ldots + r_n\,\overrightarrow{h_p}$$

Il s'ensuit que

$$p_G\,(\vec{v}) + p_H\,(\vec{v}) = r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + r_p\,\overrightarrow{g_p} + r_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} + r_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} + \ldots + r_n\,\overrightarrow{h_p} = \vec{v}$$

ce qui démontre la proposition.

Corrigé de l'exercice 1.2 - 2

```
Clear[r1, r2, r3];
efface
```

$$ga = \{75, 10, 5\}\,\frac{1}{100};$$

$$gb = \{80, 5, 10\}\,\frac{1}{100};$$

$$gc = \{78, 7, 8\}\,\frac{1}{100};$$

```
m = Transpose[{ga, gb, gc}];
  transposée
NullSpace[m]
espace nul
```

$$\left\{\left\{-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right\}\right\}$$

Le système d'équations est singulier: il possède une infinité de solutions. Utilisons la méthode Reduce:

```
Reduce[75/100 r1 + 80/100 r2 + 78/100 r3 == 169 ∧
réduis
  10/100 r1 + 5/100 r2 + 7/100 r3 == 18 ∧
  5/100 r1 + 10/100 r2 + 8/100 r3 == 15, {r1, r2, r3}]
```

$$r2 == -130 + \frac{3\,r1}{2}\ \&\&\ r3 == 350 - \frac{5\,r1}{2}$$

Autres conditions:

$$r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad r_3 \geq 0$$

```
Reduce[75/100 r1 + 80/100 r2 + 78/100 r3 == 169 ∧
réduis
  10/100 r1 + 5/100 r2 + 7/100 r3 == 18 ∧
  5/100 r1 + 10/100 r2 + 8/100 r3 == 15 ∧ r1 ≥ 0 ∧ r2 ≥ 0 ∧ r3 ≥ 0, {r1, r2, r3}]
```

$$\frac{260}{3} \leq r1 \leq 140\ \&\&\ r2 == \frac{1}{2}\left(-260 + 3\,r1\right)\ \&\&\ r3 == \frac{1}{78}\left(16\,900 - 75\,r1 - 80\,r2\right)$$

```
r3 == Simplify[1/7 (1800 - 10 r1 - 5 r2) /. r2 → 1/2 (-260 + 3 r1)]
      simplifie
```

$$r3 == 350 - \frac{5\,r1}{2}$$

Ensemble des solutions:

$$\boxed{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -130 \\ 350 \end{pmatrix} + \frac{r_1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \frac{260}{3} \leq r_1 \leq 140}$$

Masse totale:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + \left(-130 + \frac{3}{2} r_1\right) + \left(350 - \frac{5}{2} r_1\right) = 220 \qquad [\text{kg}]$$

Corrigé de l'exercice 1.2 - 3

Il s'agit d'un problème de statique: la somme des forces qui s'appliquent sur le corps est nulle. La force exercée par un fil a la direction donnée par le fil.

$$\vec{P} + r_1 \overrightarrow{d_1} + r_2 \overrightarrow{d_2} + r_3 \overrightarrow{d_3} = \vec{0}$$

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\,g \end{pmatrix}$$

```
Clear[m];
efface
d1 = {-1, 3, 2}; d2 = {2, 2, 3};
d3 = {0, -1, 1};
a = Transpose[{d1, d2, d3}];
    transposée
NullSpace[a]
espace nul
```

```
{}
```

La force exercée par le premier fil est

$$\vec{F_1} = r_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
v = {0, 0, 9.81 m}; r = LinearSolve[a, v]; f1 = r[[1]] d1
                        résous équation linéaire
```

```
{-1.308 m, 3.924 m, 2.616 m}
```

La norme de la force exercée par le premier fil est

$\sqrt{f1.f1}$

$4.89409 \sqrt{m^2}$

$$F_1 = \| \vec{F_1} \| = 4.89409\, m \quad \text{où } m \text{ est la masse du corps.}$$

En termes de projection:

soit $\vec{P}$ un vecteur,

G le sous-espace de base $\{\vec{d_1}\}$ et

H le sous-espace de base $\left\{\vec{d_2},\ \vec{d_3}\right\}$.

Déterminez le vecteur $\vec{F_1}$ qui est l'image par la projection de $\vec{P}$ sur G parallèlement à H. Calculez ensuite la norme de ce vecteur.

Corrigé de l'exercice 1.2 - 4

Exprimons le vecteur "poteau" comme combinaison linéaire des vecteurs qui dirigent le plan du coteau et les rayons du soleil:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

```
Clear[m];
efface
g1 = {1, 0, 0}; g2 = {0, 3, 1};
h = {-1, 4, -3};
m = Transpose[{g1, g2, h}];
    transposée
NullSpace[m]
espace nul
```

```
{}
```

L'ombre du poteau est alors la composante située le plan du coteau:

$$\text{ombre} = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
v = {0, 0, 5}; r = LinearSolve[m, v]; ombre = r[[1]] g1 + r[[2]] g2
```

résous équation linéaire

$$\left\{-\frac{15}{13}, \frac{60}{13}, \frac{20}{13}\right\}$$

En termes de projection:

soit $\vec{v}$ le vecteur "poteau",

G le sous-espace "coteau" de base $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}\}$ et

H le sous-espace "rayon de soleil" de base $\{\vec{h}\}$.

Déterminez le vecteur $\overrightarrow{\text{ombre}}$ qui est l'image par la projection de $\vec{v}$ sur G parallèlement à H.