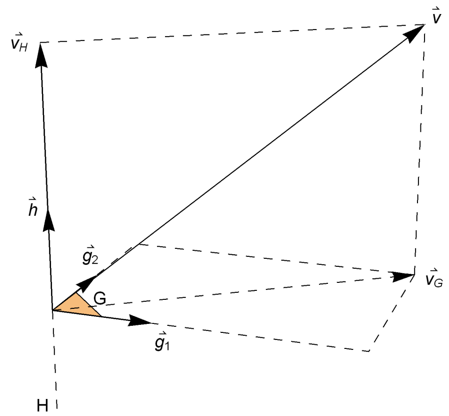
Marcel Délèze
Edition 2017

Projection sur l'espace supplémentaire orthogonal, cas vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Soit G le sous-espace engendré par la base $(\overrightarrow{g_1},\ \overrightarrow{g_2})$ et H le sous-espace engendré par la base $(\vec{h})$ de telle manière que $(\overrightarrow{g_1},\ \overrightarrow{g_2},\ \vec{h})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que $G \perp H$ c'est-à-dire $\overrightarrow{g_1} \perp \vec{h}$ et $\overrightarrow{g_2} \perp \vec{h}$.
Dans un tel cas, on dit que ***H* est le sous-espace supplémentaire orthogonal de *G* dans $\mathbb{R}^3$**.



Notons $\overrightarrow{v_G}$ = projection orthogonale de $\vec{v}$ sur G et $\overrightarrow{v_H}$ = projection orthogonale de $\vec{v}$ sur H. On a

$$\overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_H} = \vec{v}$$

Or, pour calculer $\overrightarrow{v_G}$, il faut résoudre un système de deux équation à deux inconnues, tandis que, pour calculer $\overrightarrow{v_H}$, il suffit de résoudre un système d'une équation à une inconnue. Pour calculer $\overrightarrow{v_G}$ dans le cas où H est connu, il est donc avantageux de calculer d'abord $\overrightarrow{v_H}$ puis la différence $\overrightarrow{v_G} = \vec{v} - \overrightarrow{v_H}$.

Projection sur l'espace supplémentaire orthogonal, cas affine dans $\mathbb{R}^n$

Soit G le sous-espace affine de repère $(A,\ \overrightarrow{g_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{g_p})$ et H le sous-espace affine de repère $(B,\ \overrightarrow{h_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{h_q})$. Nous supposons que G et H sont des espaces supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $n = p + q$, $\{\overrightarrow{g_1},\ \overrightarrow{g_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{g_p},\ \overrightarrow{h_1},\ \overrightarrow{h_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{h_q}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{g_i} \perp \vec{h_j}$ pour tous les $i \in \{1,\ \ldots,\ p\}$, $j \in \{1,\ \ldots,\ q\}$. On exige donc que chaque $\vec{g_i}$ soit orthogonal à chaque $\vec{h_j}$ mais on ne demande pas que les $\vec{g_i}$ soient orthogonaux entre eux ni que les $\vec{h_j}$ soient orthogonaux entre eux.

1. L'intersection des espaces G et H consiste en un et un seul point I. En effet,

$$I \in G \Longrightarrow \overrightarrow{AI} = r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + r_p\,\overrightarrow{g_p}$$

$$I \in H \Longrightarrow \overrightarrow{BI} = r_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} + r_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} + \ldots + r_n\,\overrightarrow{h_q}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = r_1\,\overrightarrow{g_1} + r_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + r_p\,\overrightarrow{g_p} - r_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} - r_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} - \ldots - r_n\,\overrightarrow{h_q}$$

Comme $\left\{\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \ldots, \overrightarrow{g_p}, \overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \ldots, \overrightarrow{h_q}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$,

les systèmes précédents possèdent une et une seule solution.

2. Le point *I* est la projection de *B* sur *G*. En effet,

$$\overrightarrow{AB} = s_1\,\overrightarrow{g_1} + s_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + s_p\,\overrightarrow{g_p} + s_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} + s_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} + \ldots + s_n\,\overrightarrow{h_q}$$

$$\overrightarrow{AI} = s_1\,\overrightarrow{g_1} + s_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + s_p\,\overrightarrow{g_p}$$

(il s'agit du point I défini sous le point 1 avec $s_1 = r_1, \ldots$).

3. Le point *I* est la projection de *A* sur *H*. En effet,

$$\overrightarrow{BA} = t_1\,\overrightarrow{g_1} + t_2\,\overrightarrow{g_2} + \ldots + t_p\,\overrightarrow{g_p} + t_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} + t_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} + \ldots + t_n\,\overrightarrow{h_q}$$

$$\overrightarrow{BI} = t_{p+1}\,\overrightarrow{h_1} + t_{p+2}\,\overrightarrow{h_2} + \ldots + t_n\,\overrightarrow{h_q}$$

(il s'agit du point I défini sous le point 1 avec $t_{p+1} = r_{p+1}, \ldots$).

4. Il est donc possible de calculer *I* au moyen d'un système dont le nombre d'équations est **min {*p*, *q*}**. En effet,

I est la projection orthogonale de *B* sur *G* (système de *p* équations) et

I est aussi la projection orthogonale de *A* sur *H* (système de *q* équations).

Il est donc possible de calculer *I* au moyen d'un système dont le nombre d'équations est **min {*p*, *q*}**.

5. Notons P_G la projection orthogonale de *P* sur *G* et P_H la projection orthogonale de *P* sur *H*. Le point d'intersection *I* étant connu, il est possible de calculer P_G et P_H à partir d'un système dont le nombre d'équations est **min {*p*, *q*}**. En effet,

si $p \leq q$ alors on calcule d'abord P_G à partir d'un système de *p* équations

puis P_H au moyen de la relation $\overrightarrow{IP_G} + \overrightarrow{IP_H} = \overrightarrow{IP}$;

sinon on calcule d'abord P_H à partir d'un système de *q* équations

puis P_G au moyen de la relation $\overrightarrow{IP_G} + \overrightarrow{IP_H} = \overrightarrow{IP}$.

Pour l'interprétation géométrique de la situation, la figure du corrigé de l'exercice 1.1-3 présente le cas particulier $p = 2$, $q = 1$, $n = 3$.

Exercice 2.2 - 1 [Facultatif]

On définit

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 2y + 3z - 5 = 0\right\}$$

a) En notant

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A(0; -1; 1), \quad P(x, y, z)$$

montrez que l'équation s'écrit sous la forme

$$\vec{n}.\overrightarrow{AP} = 0$$

En déduire que *G* est un plan.

b) Calculez la projection orthogonale de *P*(−1; 6; −5) sur *G*.

Exercice 2.2 - 2 [Facultatif]

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque et G le plan vectoriel de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. Calculez le vecteur réfléchi $\vec{w}$ obtenu par réflexion de $\vec{v}$ sur G.

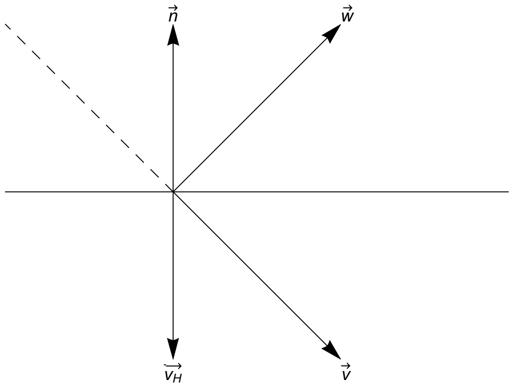
Indications

1° Les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2° L'angle d'incidence (entre $-\vec{v}$ et $\vec{n}$) et l'angle de réfexion (entre $\vec{n}$ et $\vec{w}$) sont égaux.

3° Calculez d'abord $\vec{v_H}$ = projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la direction normale $\vec{n}$.

4° Calculez enfin $\vec{w}$ (voir fig.).



Exercice 2.2 - 3 [Facultatif]

Vérifiez la formule de la **projection orthogonale de P sur π** avec les notations utilisées dans *Formulaires et tables*:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\| \vec{n} \|^2} \vec{n}$$

Liens

Vers les corrigés des exercices du § 2 :
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/corriges/ajustements/2-proj-orth-cor.pdf

Vers la page mère: Applications des mathématiques
https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/index.html