Induction et récursivité - Motivation

L'induction mathématique et la programmation récursive sont deux aspects d'une même notion qui permet de résoudre de nombreux problèmes dans les domaines des mathématiques et de l'informatique.

1. Question introductive

Depuis le site http://www.deleze.name/marcel/, rubrique « Logiciels », télécharger le jeu « Tours de Hanoï ».

Activités : Jouer avec 3 disques en mode manuel.
Jouer avec 4 disques en mode automatique.

Questions : Comment définir une stratégie pour jouer avec n disques ?
Comment définir un algorithme pour programmer le mode automatique ?

2. Résolution par récursivité

La solution s'exprime assez simplement par « induction sur le nombre n de disques ».

Ancrage à $n = 1$

Lorsqu'il n'y a qu'un seul disque, on sait résoudre le problème. Plus précisément, pour toute permutation (i, j, k) des nombres (1, 2, 3), le déplacement de la tour à $n = 1$ disque de l'emplacement i à l'emplacement k se réalise en une étape, comme suit :

- « déplacer le disque de l'emplacement i vers l'emplacement k ».

Hypothèse d'induction

Nous supposons que l'on sache résoudre le problème pour n disques, plus précisément :
« Pour toute permutation (i, j, k) des nombres (1, 2, 3), nous savons déplacer une tour à n disques de l'emplacement i à l'emplacement k. »

Pas d'induction : passage de n disques à $(n+1)$ disques

Montrons que, si on sait résoudre le problème à n disques, alors on peut résoudre le problème avec un disque de plus. En effet, pour toute permutation (i, j, k) des nombres (1, 2, 3), le déplacement d'une tour à $(n+1)$ disques de l'emplacement i à l'emplacement k peut être réalisée en trois étapes, comme suit :

- « de l'emplacement i, déplacer n disques vers l'emplacement j » ;
- « de l'emplacement i, déplacer le disque de taille $(n+1)$ vers l'emplacement k » ;
- « de l'emplacement j, déplacer les n disques vers l'emplacement k ».

Exercice

A ce stade, il faut se convaincre que cette formulation constitue une description complète d'une solution :

a) Expliciter la solution pour $n = 2$.
b) Expliciter la solution pour $n = 3$.
c) Etc.

3. Le programme Pascal

Un langage informatique est appelé « récursif » s'il comprend cette formulation et est capable de la mettre en œuvre.
A titre indicatif, le cœur du programme est le suivant.
Le triplet (*source*, *transit*, *destination*) représente une permutation des nombres (1, 2, 3).
La procédure « deplace » déplace un disque de l'emplacement *source* vers l'emplacement *destination*.

```
procedure hanoi(n:disque; source, transit, but : tour);
     begin
          if n=1 then
               deplace(source, but)
          else
               begin
                    hanoi(n-1, source, but, transit);
                    deplace(source, but);
                    hanoi(n-1, transit, source, but)
               end
     end;
```