Calculateur pour la géométrie analytique de l'espace
Exercice 6-20

Énoncés des exercices : Géométrie analytique 3D, exercices avec corrigés
https ://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/Geom3D/ga3dexos.pdf

a) $O(0, 0, 0)$ est le centre du cercle *gamma*. Soit *omega* le centre de la sphère *sigma* cherchée.
1. *omega* appartient à la droite perpendiculaire au plan du cercle qui passe par O, c'est-à-dire à l'axe Oz,
2. Soit D un point quelconque du cercle *gamma*. *omega* appartient au plan médiateur du segment CD.
b)Une méthode : d désignant la droite AB :
1. *coupe* = (plan orthogonal à d par *omega*) = (plan de symétrie)
2. Q = intersection de la droite d avec le plan *coupe*
3. p = plan polaire de Q par rapport à la sphère *sigma*
4. g = (intersection des plans p et *coupe*) = (droite des points de tangence)
5. {T1, T2} = intersection de *sigma* avec la droite g
6. (Premier plan tangent) = (plan tangent à *sigma* par $T1$)
7. (Deuxième plan tangent) = (plan tangent à *sigma* par $T2$)

`Instructions`

Commentaires

Résultats

`10: A = pt 5 0 0`

Point de coordonnées

$$(5;\ 0;\ 0)$$

`20: B = pt 0 5 0`

Point de coordonnées

$$(0;\ 5;\ 0)$$

`30: C = pt 1 1 0|1/2|17`

Point de coordonnées

$$\left(1;\ 1;\ \frac{1}{2}\sqrt{17}\right)$$

`40: pc = cart 0 0 1 0`

Plan du cercle gamma

Plan d'équation cartésienne

$$(0)\ x + (0)\ y + (1)\ z + (0)\ =\ 0$$

`50: sc = sphere 0 0 0 5/2`

Pour le calculateur, on remplace le cylindre $x^2 + y^2 = 25/4$ par la sphère sc de même centre et de même rayon que le cercle

Sphère définie par son centre et son rayon :

$$(0;\ 0;\ 0)\,, \quad \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

`60: gamma = inter pc sc`

L'intersection de la sphère sc avec le plan pc définit le même cercle gamma.

Cercle défini par un plan et une sphère dont on donne le centre et le rayon :

$$\left\{ \begin{array}{l} (0)\ x + (0)\ y + (-1)\ z + (0)\ =\ 0 \\ (0;0;0)\,, \quad \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}} \end{array} \right.$$

Remarque : le centre et le rayon de la sphère qui apparaissent ci-dessus sont, en général, distincts du centre et du rayon du cercle.

`100:`

— Question a) —

`110: Oz = sea 0 0 0 0 0 1`

Axe Oz sur lequel se trouve le centre omega

Droite définie par un point d'attache et un vecteur directeur :

$$(0;\ 0;\ 0)\,, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

`120: D = pt 3/2 2 0`

$(2x)^2 + (2y)^2 = 5^2$ *a pour solution* $\{2x = 3, 2y = 4\}$

Point de coordonnées

$$\left(\frac{3}{2};\ 2;\ 0\right)$$

`130: inter pc sc D`

Vérification : le point D est situé sur le cercle gamma défini par (pc, sc)

Point de coordonnées

$$\left(\frac{3}{2};\ 2;\ 0\right)$$

`140: m = mediateur C D`

Plan d'équation cartésienne

$$\left(\frac{-1}{2}\right)\ x + (-1)\ y + \left(\frac{1}{2}\sqrt{17}\right)\ z + (0)\ =\ 0$$

`150: omega = inter Oz m`

Centre de la sphère sigma

Point de coordonnées

$$(0;\ 0;\ 0)$$

`160: r = dist omega C`

Rayon de la sphère sigma

Distance entre les deux points

$$\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

`170: sigma = sphere omega r`

En fait, sigma coïncide avec la sphère sc

Sphère définie par son centre et son rayon :

$$(0;\ 0;\ 0)\,, \quad \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

`175: inter C sc`

Dans ce cas particulier, une méthode plus simple consiste à vérifier que C appartient à sc

Point de coordonnées

$$\left(1;\ 1;\ \frac{1}{2}\sqrt{17}\right)$$

`180: sphere_eq sigma`

(Réponse :) équation de la sphère sigma

Sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + (0)\,x + (0)\,y + (0)\,z + \left(\frac{-25}{4}\right) \ = \ 0$$

`200:`

— Question b) —

`210: d = sea_param A B`

d = droite AB

Droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 5 + (-5)\,\mu_1 \\ y = 0 + 5\,\mu_1 \\ z = 0 \end{cases}$$

où μ_1 désigne un paramètre réel.

`220: delta = dist d omega`

Distance de la droite au point

$$\frac{5}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

`230: sub delta r`

Différence de deux nombres

$$\frac{-5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)\sqrt{2}$$

```
240: float #230
```

Vérification de l'hypothèse : la droite d est extérieure à la sphère sigma

Différence de deux nombres

$$1.0355339059327$$

```
250: supplorth d
```

Espace orthogonal à la droite d

Sous-espace vectoriel de dimension 2 engendré par les vecteurs

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

```
260: coupe = sea omega #250
```

Plan 'coupe'

Plan défini par un point d'attache et deux vecteurs directeurs :

$$(0;\ 0;\ 0)\,, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

```
270: coupe = cart coupe
```

Idem

Plan d'équation cartésienne

$$(-1)\ x + (1)\ y + (0)\ z + (0)\ =\ 0$$

```
280: Q = inter d coupe
```

Point de la droite d situé dans le plan de symétrie

Point de coordonnées

$$\left(\frac{5}{2};\ \frac{5}{2};\ 0\right)$$

```
290: p = polaire Q sigma
```

Plan polaire de Q par rapport à la sphère

Plan d'équation cartésienne

$$(2)\ x + (2)\ y + (0)\ z + (-5)\ =\ 0$$

```
300: g = inter p coupe
```

Droite passant par les points de tangence

Droite définie par un point d'attache et un vecteur directeur :

$$\left(\frac{5}{4};\ \frac{5}{4};\ 0\right),\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

`310: T = inter g sigma`

Ensemble de 2 points :

$$\left\{\left(\tfrac{5}{4};\ \tfrac{5}{4};\ \tfrac{5}{4}\sqrt{2}\right),\ \left(\tfrac{5}{4};\ \tfrac{5}{4};\ \tfrac{-5}{4}\sqrt{2}\right)\right\}$$

`320: T1 = compnum T 1`

Premier point de tangence

Point de coordonnées

$$\left(\frac{5}{4};\ \frac{5}{4};\ \frac{5}{4}\sqrt{2}\right)$$

`330: T2 = compnum T 2`

Deuxième point de tangence

Point de coordonnées

$$\left(\frac{5}{4};\ \frac{5}{4};\ \frac{-5}{4}\sqrt{2}\right)$$

`340: OT1 = vect omega T1`

Vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

`345: OT1 = prod OT1 -4/5`

Vecteur normal du premier plan tangent

Vecteur

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

`350: t1 = cart_norm T1 OT1`

(Réponse :) Premier plan tangent

Plan d'équation cartésienne

$$(1)\ x + (1)\ y + \left(1\sqrt{2}\right)\ z + (-5)\ =\ 0$$

`370: OT2 = vect omega T2`

Vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{-5}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

`375: OT2 = prod OT2 -4/5`

Vecteur normal du deuxième plan tangent

Vecteur

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

```
380: t2 = cart_norm T2 OT2
```

(Réponse :) Deuxième plan tangent

Plan d'équation cartésienne

$$(1)\ x + (1)\ y + \left(-1\sqrt{2}\right)\ z + (-5)\ =\ 0$$

```
700:
```

— Vérifications —

```
810: dist t1 omega
```

Le plan t1 est tangent à la sphère de rayon r

Distance du plan au point

$$\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

```
820: dist t2 omega
```

Le plan t2 est tangent à la sphère de rayon r

Distance du plan au point

$$\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

```
830: inter d t1
```

Le plan t1 contient la droite d

Droite définie par un point d'attache et un vecteur directeur :

$$(0;\ 5;\ 0)\,,\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
840: inter d t2
```

Le plan t2 contient la droite d

Droite définie par un point d'attache et un vecteur directeur :

$$(0;\ 5;\ 0)\,,\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Marcel Délèze