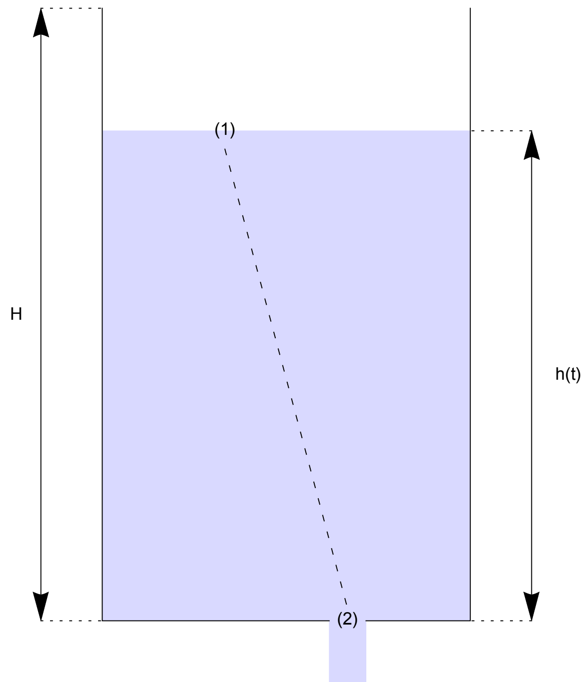
La formule d'écoulement, ou le problème du bassin qui se vide par gravité

Marcel Délèze

1. Introduction

Qu'il s'agisse d'un bassin, d'un réservoir ou d'une cuve, nous supposons que son contenu liquide s'en échappe par un trou sous l'effet de la gravité.



Sachant qu'un bassin se vide en 100 minutes, combien de temps faut-il pour qu'il se vide de la moitié ?
Ne répondez pas 50 minutes ! En effet, lorsque le bassin est plein, la pression sur le trou de sortie est grande. Au début, le bassin se vide rapidement. Par contre, lorsqu'il est bientôt vide, la pression sur le trou de sortie devient faible. Ainsi, vers la fin, le bassin se vide lentement. Dans ces circonstances, il serait aberrant de résoudre le problème au moyen d'une fonction affine.
La dernière tabelle de cet article indique qu'il faut répondre 29.3 min.

2. Modélisation du problème d'écoulement

Hypothèses et notations

Une cuve de hauteur H et de section horizontale S uniforme est initialement pleine. Au temps $t = 0$, le liquide commence à s'écouler par gravité par un trou de section s situé au point (2) sur le fond de la cuve. On note $h(t)$ la hauteur du liquide dans la cuve au temps t. Par hypothèse, $h(0) = H$. On suppose que le liquide est incompressible et que sa viscosité est nulle.

Etablissement de l'équation différentielle de l'écoulement

Avec les notations
p_1 = pression au point (1) = pression atmosphérique;
p_2 = pression au point (2) = pression atmosphérique = p_1;
z_1 = altitude du point (1) ;
z_2 = altitude du point (2) ;
$h = z_1 - z_2$ = hauteur du liquide à l'instant t;
v_1 = vitesse du liquide au point (1) ;
v_2 = vitesse du liquide au point (2) ;
l'**équation de Bernoulli** exprime la conservation de l'énergie le long d'un filet de courant lorsque le liquide n'est pas visqueux:

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

On en tire

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2 \tag{1}$$

Pour un fluide incompressible, l'**équation de continuité** exprime la conservation du volume

$$Sv_1 = sv_2$$

Tirons v_2 de cette dernière équation et substituons dans l'équation (1)

$$v_1^2 + 2gh = \left(\frac{S}{s}\right)^2 v_1^2$$

D'où

$$v_1^2 = \frac{2g}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}h$$

Posons

$$q = \sqrt{\frac{g}{2\left(\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right)}}$$

Ainsi,

$$v_1^2 = 4q^2 h$$
$$v_1 = 2q\sqrt{h}$$

D'autre part,

$$v_1 = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

Finalement, $h(t)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire avec condition initiale

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2q\sqrt{h} \quad \text{et} \quad h(0) = H}$$

où q et H sont deux constantes positives.

3. Résolution de l'équation différentielle

3.1 Équation de Bernoulli

L'équation différentielle, d'inconnue $h(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2qh^{\frac{1}{2}}$$

est une équation de Bernoulli, car elle est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + p(t)h = q(t)h^n$$

avec $p(t) = 0$ et $n = \frac{1}{2}$.
Elle se résout en multipliant les deux membres par $h^{-n} = h^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$,
puis en effectuant le changement de variable $z = h^{-n+1} = h^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} h^{-\frac{1}{2}} = -2qh^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}$$

$$h^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2q \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

En substituant dans l'équation (2),

$$2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -2q$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -q$$

On obtient ainsi une équation différentielle ordinaire qui est linéaire.

3.2 Solution générale

En intégrant chaque membre par rapport au temps, on obtient

$$z = -qt + c \quad \text{où } c \text{ est une constante d'intégration}$$

$$h^{\frac{1}{2}} = -qt + c \quad (\text{puisque } h \geq 0 \text{ et } q > 0\text{, il s'ensuit que } c > 0)$$

$$h = (c - qt)^2$$

$$h(t) = (c - qt)^2$$

3.3 Solution particulière

En tenant compte la condition initiale

$$H = h(0) = (c - q0)^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{H}$$

Finalement,

$$\boldsymbol{h(t) = \left(\sqrt{H} - qt\right)^2}$$

4. Formule indépendante des caractéristiques du bassin

T = durée de la vidange

$$h(T) = 0 \iff T = \frac{\sqrt{H}}{q}$$

τ = fraction de la durée de la vidange (ou pourcentage de la durée)

$$\tau = \frac{t}{T} = \frac{q}{\sqrt{H}}t$$

η = taux de remplissage (ou pourcentage du volume restant dans la cuve)

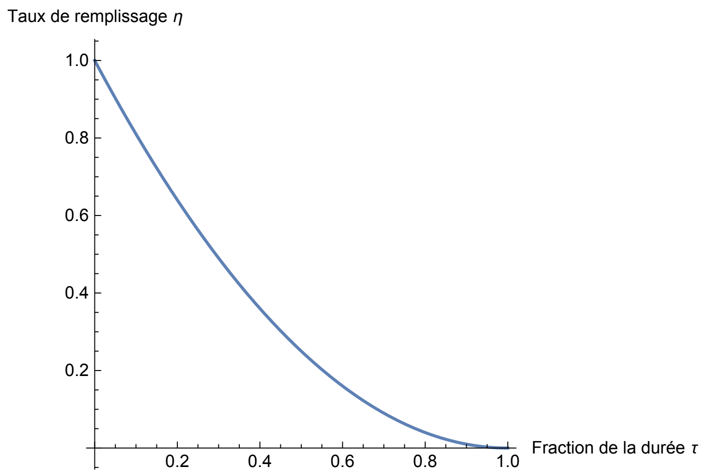
$$\eta = \frac{h(t)}{H} = \frac{\left(\sqrt{H} - qt\right)^2}{H} = \left(\frac{\sqrt{H} - qt}{\sqrt{H}}\right)^2 = \left(1 - \frac{q}{\sqrt{H}}t\right)^2 = (1-\tau)^2$$

On obtient ainsi un résultat indépendant des caractéristiques du bassin

$$\boldsymbol{\eta = (1-\tau)^2}$$

Taux de remplissage en fonction de la fraction de la durée

Exemple numérique: une cuve se vide en 100 min. Quel est le taux de remplisage de la cuve après 50 min ?
Ne répondez pas 50 % ! La tabelle ci-dessous indique que, après 50 min, la cuve est aux trois-quarts vide (taux de remplissage de 25 %).

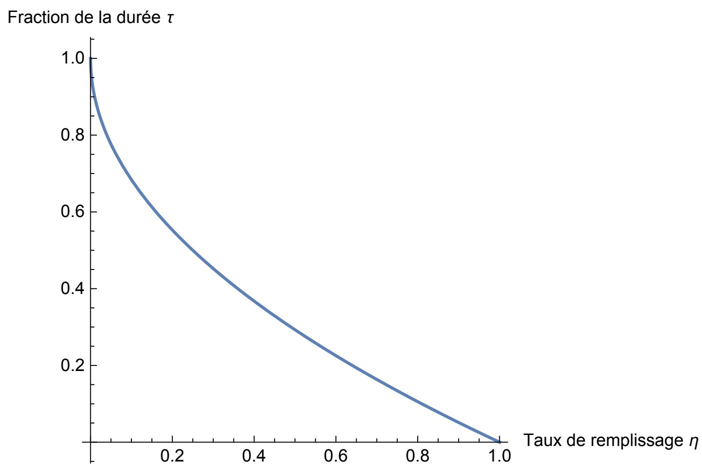


$\tau = \%$ durée	$\eta = \%$ volume
0	100.0
10	81.0
20	64.0
30	49.0
40	36.0
50	25.0
60	16.0
70	9.0
80	4.0
90	1.0
100	0.0

Fraction de la durée en fonction du taux de remplissage

Exemple numérique: une cuve se vide en 100 min. Combien de temps faut-il pour qu'elle soit à moitié pleine ?
Ne répondez pas 50 min ! La tabelle ci-dessous indique que la cuve est à demi pleine après 29.3 min.

$$\boldsymbol{\tau = 1 - \sqrt{\eta}}$$



η = % volume	τ = % durée
100	0.0
90	5.1
80	10.6
70	16.3
60	22.5
50	29.3
40	36.8
30	45.2
20	55.3
10	68.4
0	100.0

Lien vers la page mère:
La formule d'écoulement, ou le problème du bassin qui se vide par gravité
www.deleze.name/marcel/physique/ecoulement/index.html