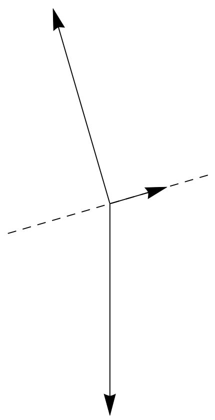
Dynamique: en descente libre, comparaison de deux cyclistes de masses différentes

Richard (45 kg) et son père (80 kg) font du vélo.Richard observe que, même sans pédaler, son père prend systématiquement de l'avance sur lui dans les descentes.

Pourquoi le père de Richard dépasse son fils dans les descentes ?

Forces

Sur un plan incliné, dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est α, un mobile est lâché sans vitesse initiale: v(0) = 0.



La projection orthogonale des forces sur la trajectoire orientée de haut en bas donne :

- pour la pesanteur : m*g*sin (α);
- pour la force de soutien: 0 (car la réaction du plan incliné est normale au plan);
- pour la force de frottement (résistance de l'air) : - $\frac{1}{2} * C_w * \rho * S * v^2$; remarquons que cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse; elle est aussi proportionnelle à la section apparente S du mobile.

Equation différentielle

La loi de Newton dit que (la somme des forces) est égale à (la masse multipliée par l'accélération):

$$m * g * \sin(\alpha) - \frac{1}{2} * C_w * \rho * S * v^2(t) == m * v'(t)$$

$$v'(t) == g * \sin(\alpha) - \frac{1}{2} * C_w * \rho * \frac{S}{m} * v^2(t)$$

Substituons :

- $\frac{S}{m} = \frac{\text{const}}{m^{1/3}}$ où la constante ne dépend pas de m,
  ce qui suppose que Richard et son père adoptent la même position (plus ou moins aérodynamique) sur leurs vélos respectifs. Explication : une dimension linéaire du cyliste est proportionnelle à $\sqrt[3]{m}$, et la section apparente S est proportionnelle à $\left(\sqrt[3]{m}\right)^2$. On peut ensuite simplifier.

- $\frac{1}{2} * C_w * \rho * \frac{S}{m} = \frac{c}{m^{1/3}}$ où c est une nouvelle constante positive qui ne dépend ni de t, ni de m.

$$v'(t) == g * \sin(\alpha) - \frac{c}{m^{1/3}} * v^2(t)$$

Résolution

```
Clear["Global`*"]
```

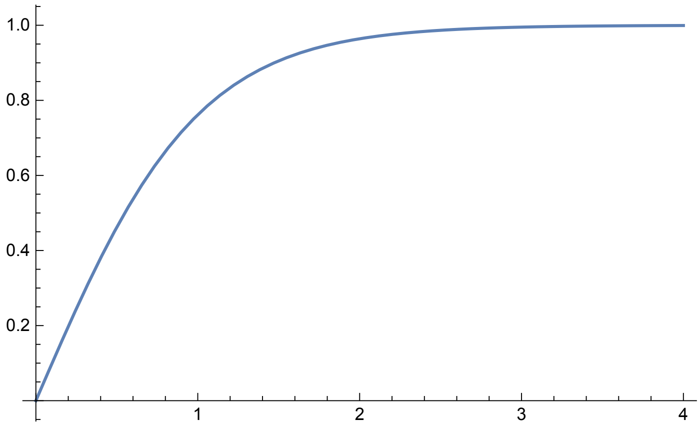
$$\text{sol} = \text{DSolve}\left[\left\{v'[t] == g\,\text{Sin}[\alpha] - \frac{c}{m^{1/3}} v[t]^2,\ v[0] == 0\right\}, v[t], t\right]$$

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

$$\left\{\left\{v[t] \to \frac{\sqrt{g}\, m^{1/6} \sqrt{\text{Sin}[\alpha]}\ \text{Tanh}\left[\frac{\sqrt{c}\,\sqrt{g}\, t \sqrt{\text{Sin}[\alpha]}}{m^{1/6}}\right]}{\sqrt{c}}\right\}\right\}$$

La vitesse s’exprime avec la fonction tangente hyperbolique qui tend vers 1 pour z tendant vers l’infini:

```
Plot[Tanh[z], {z, 0, 4}]
```




```
Limit[Tanh[z], z → ∞]
```

1

La vitesse tend vers une limite, appelée vitesse limite, que nous notons vlim:

$$\text{vlim} = \frac{\sqrt{g}\, m^{1/6} \sqrt{\text{Sin}[\alpha]}}{\sqrt{c}}$$

$$\frac{\sqrt{g}\, m^{1/6} \sqrt{\text{Sin}[\alpha]}}{\sqrt{c}}$$

Cela signifie qu'après un cetain temps, la vitesse devient pratiquement constante.

Vérification de la vitesse limite

vlim vérifie l'équation différentielle, car

$$\frac{c}{m^{1/3}} * vlim^2$$

g Sin[α]

On aurait pu calculer directement une solution constante de l'équation différentielle (en ignorant la condition initiale) :

$$0 == g * \sin(\alpha) - \frac{c}{m^{1/3}} * v^2$$

$$\frac{c}{m^{1/3}} * v^2 == g * \sin(\alpha)$$

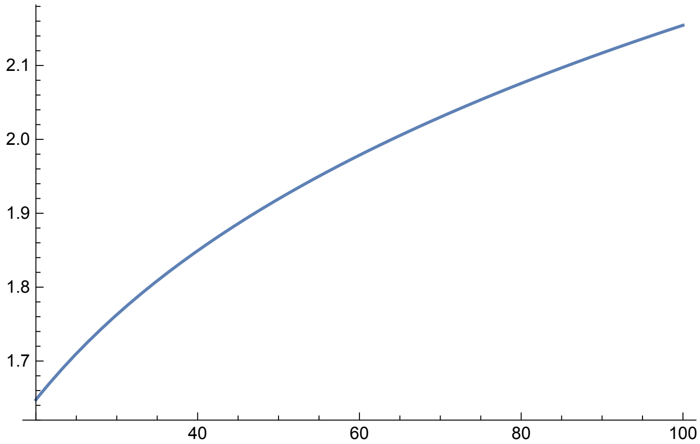
$$v^2 == \frac{g * \sin(\alpha) * m^{1/3}}{c}$$

$$vlim == \sqrt{\frac{g * \sin(\alpha) * m^{1/3}}{c}}$$

Conséquences

En fonction de m, la vitesse limite augmente comme la racine sixième de la masse :

```
Plot[m^(1/6), {m, 20, 100}]
```



Le rapport des vitesses limites entre celle du père et celle de Richard est

```
(80./45.)^(1/6)
```

1.10064

Par rapport à la vitesse limite d’une personne de 45 kg, celle d’une personne de 80 kg est supérieure de 10 %, ce qui a la conséquence suivante: en partant en même temps d’une même position initiale, l’écart entre les deux personnes va augmenter sans cesse au fil du temps.

Lien vers la page mère

http://www.deleze.name/~marcel//physique/dynamique/plan-incline/index.html