

Variante II

Les 28 fonctions de base de l'élément générique élargi

Élément de pseudo - référence

- Fonctions réciproques de α_j , $i=1,2,3,4$, notées $\text{inv}\alpha[i]$
Thèse p. 50

$$\text{inv}\alpha[1][\{x_, y_, z_\}] := \{x, y, z\}$$

$$\text{inv}\alpha[2][\{x_, y_, z_\}] := \{y, z, 1 - x - y - z\}$$

$$\text{inv}\alpha[3][\{x_, y_, z_\}] := \{z, 1 - x - y - z, x\}$$

$$\text{inv}\alpha[4][\{x_, y_, z_\}] := \{1 - x - y - z, x, y\}$$

- Fonctions réciproques de ϕ_i , $i=1,2,3,4$, notées $\text{inv}\phi[i]$
Thèse p. 50

$$\text{inv}\phi[1][\{vx_, vy_, vz_\}] := \{vx, vy, vz\}$$

$$\text{inv}\phi[2][\{vx_, vy_, vz_\}] := \{vy, vz, -vx - vy - vz\}$$

$$\text{inv}\phi[3][\{vx_, vy_, vz_\}] := \{vz, -vx - vy - vz, vx\}$$

$$\text{inv}\phi[4][\{vx_, vy_, vz_\}] := \{-vx - vy - vz, vx, vy\}$$

- Polynômes de référence

Thèse p. 56, fonctions de base $\text{pt}(i,j)$

Thèse p. 105, FUNCTION PT1; Thèse p. 106, SUBROUTINE UT28, fonctions 1 à 16

$$\text{pt}[1, 0][\{x_, y_, z_\}] := (1 - x - y - z) (1 + x + y + z - 2 (x^2 + y^2 + z^2 + x y + y z + z x))$$

$$\text{pt}[1, 1][\{x_, y_, z_\}] := x (1 - x - y - z) \left(1 - x - \frac{1}{2} (y + z) \right)$$

$$\text{pt}[1, 2][\{x_, y_, z_\}] := \text{pt}[1, 1][\{y, z, x\}]$$

$$\text{pt}[1, 3][\{x_, y_, z_\}] := \text{pt}[1, 1][\{z, x, y\}]$$

$$\text{pt}[i_, j_][\{x_, y_, z_\}] := \text{pt}[1, j_][\text{inv}\alpha[i_][\{x, y, z\}]]$$

$$\text{Do}[\text{Do}[\text{ut}[4 i + j - 3] = \text{pt}[i, j], \{j, 0, 3\}], \{i, 1, 4\}]$$

- Fonctions rationnelles de pseudo-référence, dépendants des paramètres $\mu = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$
Thèse, p. 61-64, fonctions $\text{wt}(i,j)$
Thèse p. 106, SUBROUTINE UT28, fonctions 17 à 28

$\mu_i =$ = paramètres dénommés "directions normales déplacées"

$$r0[\{x_, y_, z_ \}] := \frac{2 x y^2 z^2}{(x+y)(x+z)}$$

$$r[\{x_, y_, z_ \}] := \frac{2 x^2 y^2 z^2 (1-x-y-z)}{(1-x-y)(1-x-z)(1-y-z)(1-y)(1-z)}$$

$$r1[\{x_, y_, z_ \}] := r[\{x, y, z\}] \left(-1 - \frac{y z (1+x)}{(1-y)(1-z)} \right)$$

$$r2[\{x_, y_, z_ \}] := r[\{x, y, z\}] \frac{z(2x+y)}{(1-z)}$$

$$r3[\{x_, y_, z_ \}] := r[\{x, y, z\}] \frac{y(2x+z)}{(1-y)}$$

$$\text{wt}[1, 1][\{\mu x_, \mu y_, \mu z_ \}, \{x_, y_, z_ \}] :=$$

$$r0[\{x, y, z\}] + (\mu x r1[\{x, y, z\}] + \mu y r2[\{x, y, z\}] + \mu z r3[\{x, y, z\}]) / (\mu x + \mu y + \mu z)$$

$$\text{wt}[1, 2][\{\mu x_, \mu y_, \mu z_ \}, \{x_, y_, z_ \}] := \text{wt}[1, 1][\{\mu y, \mu z, \mu x\}, \{y, z, x\}]$$

$$\text{wt}[1, 3][\{\mu x_, \mu y_, \mu z_ \}, \{x_, y_, z_ \}] := \text{wt}[1, 1][\{\mu z, \mu x, \mu y\}, \{z, x, y\}]$$

$$\text{wt}[i_ / ; i \geq 2, j_][\{\mu x_, \mu y_, \mu z_ \}, \{x_, y_, z_ \}] :=$$

$$\text{wt}[1, j][\{\mu x, \mu y, \mu z\}, \text{inv}\alpha[i][\{x, y, z\}]]$$

$$\text{Do}[\text{Do}[\text{ut}[3 i + j + 13] = \text{wt}[i, j], \{j, 1, 3\}], \{i, 1, 4\}]$$

- **Dérivée directionnelle des polynômes de référence**
Thèse p. 56, dérivée des fonctions de base pt(i,j)
Thèse p. 107-109, SUBROUTINE DUT28, fonctions 1 à 16

Direction $t = (t_1, t_2, t_3)$

$$\text{dut}[k_ / ; k \leq 16][\{t1_, t2_, t3_ \}, \{xv_, yv_, zv_ \}] :=$$

$$\{t1, t2, t3\} . \text{D}[\text{ut}[k][\{x, y, z\}], \{x, y, z\}] / . \{x \rightarrow xv, y \rightarrow yv, z \rightarrow zv\}$$

- **Dérivée directionnelle des fonctions rationnelles de pseudo-référence, dépendants des paramètres $\mu = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$**
Thèse, p. 61-64, fonctions wt(i,j)
Thèse p. 107-109, SUBROUTINE DUT28, fonctions 17 à 28

Direction $t = (t_1, t_2, t_3)$

$$\text{dut}[k_ / ; k \geq 17][\{t1_, t2_, t3_ \}, \{\mu x_, \mu y_, \mu z_ \}, \{xv_, yv_, zv_ \}] :=$$

$$\{t1, t2, t3\} . \text{D}[\text{ut}[k][\{\mu x, \mu y, \mu z\}, \{x, y, z\}], \{x, y, z\}] / . \{x \rightarrow xv, y \rightarrow yv, z \rightarrow zv\}$$

Élément générique élargi

- **Fonction L, thèse p. 53.**
 ℓ = partie linéaire de L; invL = fonction réciproque de L

$$\ell = \begin{pmatrix} x2 - x1 & x3 - x1 & x4 - x1 \\ y2 - y1 & y3 - y1 & y4 - y1 \\ z2 - z1 & z3 - z1 & z4 - z1 \end{pmatrix};$$

$$L[\{x_, y_, z_ \}] := \ell . \{x, y, z\} + \{x1, y1, z1\}$$

$$\text{invL}[\{x_, y_, z_ \}] := \text{Inverse}[\ell] . \{x - x1, y - y1, z - z1\}$$

Directions normales déplacées $\mu = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$

Thèse p. 58

$v_i = \ell^{-1}(m_i)$ = direction normale déplacée = vecteur normal m_i à la i -ème face transporté sur la i -ème face du tétraèdre de référence.

$\mu_i = \phi_i^{-1}(v_i)$ = direction normale déplacée = vecteur normal m_i à la i -ème face transporté sur la 1-ère face du tétraèdre de référence.

```

a[1] = {x1, y1, z1};
a[2] = {x2, y2, z2};
a[3] = {x3, y3, z3};
a[4] = {x4, y4, z4};

m[1] = (a[3] - a[2]) × (a[4] - a[2]);
v[1] = Inverse[f].m[1];
μ[1] = invφ[1][v[1]];
μ[1] = N[μ[1] / (μ[1][[1]] + μ[1][[2]] + μ[1][[3]])];

m[2] = (a[4] - a[3]) × (a[1] - a[3]);
v[2] = Inverse[f].m[2];
μ[2] = invφ[2][v[2]];
μ[2] = N[μ[2] / (μ[2][[1]] + μ[2][[2]] + μ[2][[3]])];

m[3] = (a[1] - a[4]) × (a[2] - a[4]);
v[3] = Inverse[f].m[3];
μ[3] = invφ[3][v[3]];
μ[3] = N[μ[3] / (μ[3][[1]] + μ[3][[2]] + μ[3][[3]])];

m[4] = (a[2] - a[1]) × (a[3] - a[1]);
v[4] = Inverse[f].m[4];
μ[4] = invφ[4][v[4]];
μ[4] = N[μ[4] / (μ[4][[1]] + μ[4][[2]] + μ[4][[3]])];

```

■ Base d'interpolation, thèse p. 65

Thèse p. 111, SUBROUTINE U28, fonctions 1 à 28

```

u[k_ /; k ≤ 16][{x_, y_, z_}] := ut[k][invL[{x, y, z}]]
u[k_ /; k ≥ 17][{vx_, vy_, vz_}, {x_, y_, z_}] := ut[k][{vx, vy, vz}, invL[{x, y, z}]]

```

■ Dérivée directionnelle de la base d'interpolation, thèse p. 65

Thèse p. 112, SUBROUTINE DU28, fonctions 1 à 28

Direction $t = (t_1, t_2, t_3)$

```

du[k_ /; k ≤ 16][{t1_, t2_, t3_}, {xv_, yv_, zv_}] :=
  {t1, t2, t3}.D[u[k][{x, y, z}], {{x, y, z}}] /. {x → xv, y → yv, z → zv}

du[k_ /; k ≥ 17][{t1_, t2_, t3_}, {xv_, yv_, zv_}] :=
  {t1, t2, t3}.D[u[k][μ[Quotient[k - 14, 3]], {x, y, z}], {{x, y, z}}] /. {x → xv, y → yv, z → zv}

```

Tests numériques

Les valeurs numériques calculées ci - dessous ont été comparées avec succès aux valeurs numériques correspondantes calculées avec le programme FORTRAN de la thèse.

■ Données numériques

```
nuage = {{0.1, 0.2, 0.3}, {0.3, 0.1, 0.2}, {0.2, 0.3, 0.1}}
{{0.1, 0.2, 0.3}, {0.3, 0.1, 0.2}, {0.2, 0.3, 0.1}}
```

■ Valeurs des fonctions de pseudo-référence

```
Flatten[Table[Table[Table[ut[4 i + j - 3][nuage[[k]]], {j, 0, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
0.44 0.026 0.048 0.066
0.08 0.009 0.012 0.014
0.18 0.027 0.032 0.011
0.3 0.054 0.018 0.033
0.44 0.066 0.026 0.048
0.3 0.018 0.033 0.054
0.08 0.009 0.014 0.012
0.18 0.032 0.027 0.011
0.44 0.048 0.066 0.026
0.18 0.027 0.011 0.032
0.3 0.018 0.054 0.033
0.08 0.014 0.009 0.012
```

```
Flatten[
Table[Table[Table[ut[3 i + j + 13][{1/2, 1/3, 1/6}, nuage[[k]]], {j, 1, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
0.00588222 0.00234944 0.00118942
0.0171029 0.0105825 0.00724898
0.00291499 0.00182333 0.0144508
0.000904409 0.00837619 0.00354239
0.00111526 0.00593105 0.00238566
0.00826032 0.00346337 0.00105767
0.0170086 0.00643469 0.0115603
0.00162204 0.00315349 0.0144314
0.00229836 0.00114824 0.00598557
0.00298522 0.0140517 0.00206924
0.00824921 0.000984656 0.00356308
0.00553265 0.018293 0.0113714
```

■ Dérivée directionnelle des fonctions de pseudo-référence

```
Flatten[Table[Table[Table[dut[4 i + j - 3][{1, 1, 1}, nuage[[k]]], {j, 0, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
-4.02 -0.015 -0.28 -0.515
1.02 0.135 0.16 0.115
1.34 0.225 0.08 0.165
1.66 0.015 0.24 0.275
-4.02 -0.515 -0.015 -0.28
1.66 0.24 0.275 0.015
1.02 0.135 0.115 0.16
1.34 0.08 0.225 0.165
-4.02 -0.28 -0.515 -0.015
1.34 0.225 0.165 0.08
1.66 0.24 0.015 0.275
1.02 0.115 0.135 0.16
```

```
Flatten[Table[Table[Table[dut[4 i + j - 3][{1, -1, 1}, nuage[[k]]], {j, 0, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
-1.34  0.155  -0.36  -0.065
0.94   0.065  0.16   0.145
-1.02  -0.105  -0.24  0.035
1.42   0.165  0.24   0.005
-1.5   -0.065  -0.325  0.04
1.3    -0.09  0.275  0.165
-0.9   -0.065  -0.175  -0.11
1.1    0.16   0.225  -0.035
-1.18  0.04   -0.385  0.155
1.26   0.105  0.165  0.16
-1.06  0.09   -0.315  -0.005
0.98   0.145  0.135  0.11
```

```
Flatten[Table[Table[Table[dut[4 i + j - 3][{1, 1, -1}, nuage[[k]]], {j, 0, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
-1.18  0.155  0.04   -0.385
0.98   0.135  0.11   0.145
1.26   0.105  0.16   0.165
-1.06  -0.315  0.09   -0.005
-1.34  -0.065  0.155  -0.36
1.42   0.24   0.005  0.165
0.94   0.065  0.145  0.16
-1.02  -0.24  -0.105  0.035
-1.5   0.04   -0.065  -0.325
1.1    0.225  -0.035  0.16
1.3    -0.09  0.165  0.275
-0.9   -0.175  -0.065  -0.11
```

```
Flatten[
```

```
Table[Table[Table[dut[3 i + j + 13][{0.25, 0.35, 0.4}, {1/2, 1/3, 1/6}, nuage[[k]]],
{j, 1, 3}], {i, 1, 4}], {k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
0.0287195  0.0136253  0.00799352
-0.0200381 -0.0111002  0.0395764
0.00155396 0.0148013  0.000347241
0.00860664 0.00412404 0.00288204
0.00965018 0.0300638  0.0163638
0.0100454  0.00840464 0.0115129
-0.03009   0.0342685  -0.00652447
0.0158975  0.00776206  -0.000467376
0.0182498  0.00961174  0.0286526
0.00918368 0.00828466  0.0206659
0.00376487 0.0106975   0.0117301
0.0278715  -0.0251174  -0.0189015
```

■ Tétraèdre générique, données numériques

```
x1 = 0; y1 = 0; z1 = 0;
```

```
x2 = 5; y2 = 2; z2 = 0;
```

```
x3 = 0; y3 = 4; z3 = 1;
```

```
x4 = 1; y4 = 0; z4 = 3;
```

```
nuage = {{0.1 x1 + 0.2 x2 + 0.3 x3 + 0.4 x4,
0.1 y1 + 0.2 y2 + 0.3 y3 + 0.4 y4, 0.1 z1 + 0.2 z2 + 0.3 z3 + 0.4 z4}}
```

```
{{1.4, 1.6, 1.5}}
```

```
t = {0.25, 0.35, 0.4};
```

■ Valeurs des fonctions

```
Flatten[Table[Table[Table[u[4 i + j - 3][nuage[[k]]], {j, 0, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
0.08 0.009 0.012 0.014
0.18 0.027 0.032 0.011
0.3 0.054 0.018 0.033
0.44 0.026 0.048 0.066
```

```
Flatten[Table[Table[Table[u[3 i + j + 13][μ[i], nuage[[k]]], {j, 1, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
0.0204076 0.0102859 0.00475504
0.00307413 0.0017819 0.0143182
0.00105634 0.00819551 0.00352565
0.00580448 0.00240404 0.00120573
```

```
Flatten[Table[Table[Table[du[4 i + j - 3][t, nuage[[k]]], {j, 0, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
-0.199468 -0.0200605 -0.0265806 -0.0320444
0.0109839 0.00906048 0.01 -0.0192137
0.0653065 0.0257782 -0.0292258 0.0140847
0.123177 -0.0412621 0.0230645 0.0362379
```

```
Flatten[Table[Table[Table[du[3 i + j + 13][t, nuage[[k]]], {j, 1, 3}], {i, 1, 4}],
{k, 1, Length[nuage]}], 1] // TableForm
```

```
0.0159221 0.00646051 0.00273306
-0.0103898 -0.00641308 -0.00749185
-0.00389731 -0.00301275 -0.011066
-0.00166366 -0.00763353 -0.00427423
```