Étude d'une fraction rationnelle - Exercice r2-03

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$

Directive: On déterminera les valeurs numériques des points d'inflexion à la précision de $\pm$ 0.05

Liste d'exercices corrigés: études de fractions rationnelles
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/fractions-rationnelles/index.html

Corrigé

Quotient (ou partie polynomiale) = 0

$$\frac{\text{Reste}}{\text{Dénominateur}} = \frac{x^2}{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}$$

Ensemble de définition de f : $x < -1$ ou $x > -1$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}$$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x < -1$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$-1 < x < 0$ ou $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{x\left(-2+x^3\right)}{(1+x)^2\left(1-x+x^2\right)^2}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$x < -1$ ou $-1 < x < 0$ ou $x > 2^{1/3}$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 2^{1/3}$
positif pour	$0 < x < 2^{1/3}$

$$f''(x) = \frac{2\left(1-7x^3+x^6\right)}{(1+x)^3\left(1-x+x^2\right)^3}$$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{(0,0), \left(2^{1/3}, \frac{2^{2/3}}{3}\right)\right\}$

Asymptote verticale : $x = -1$

Du côté $+\infty$, asymptote horizontale y= 0

Du côté -∞, asymptote horizontale y= 0

Pour déterminer les zéros de la dérivée seconde, il faut résoudre l'équation $x^6 - 7x^3 + 1 = 0$. Posons $z = x^3$. L'équation devient $z^2 - 7z + 1 = 0$ dont les solutions sont $z_1 = \frac{7+\sqrt{45}}{2} = 6.8541$ et $z_2 = \frac{7-\sqrt{45}}{2} = 0.145898$. En revenant à $x = z^{1/3}$, il vient $x_1 = 0.5264$ et $x_2 = 1.8995$.
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0.526441, 0.241854), (1.89955, 0.459414)\}$

Tableau de variations

x	-∞		-1		0		0.526		1.26		1.9		∞
sgn(f(x))		−	‖	+	0	+	+	+	+	+	+	+	
sgn(f'(x))		−	‖	−	0	+	+	+	0	−	−	−	
sgn(f''(x))		−	‖	+	+	+	0	−	−	−	0	+	
var(f(x))	0		-∞ ‖	∞	0		0.242		0.529		0.459		0

Graphique