Étude d’une fraction rationnelle - Exercice r1-09

Faites une étude complète, avec usage de la dérivée seconde, de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 1} + \frac{1}{2}$$

à l'exception des zéros de *f*.

Liste d’exercices corrigés: études de fractions rationnelles

Corrigé

Ensemble de définition

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

Les zéros de la fonction ne sont pas demandés.

Dérivée

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 - 1) - x^3(6x)}{(3x^2 - 1)^2} + 0 = \frac{3x^2(x^2 - 1)}{(3x^2 - 1)^2}$$

Zéros de la dérivée

$$Z_{f'} = \{-1;\ 0;\ 1\}$$

Signe de la dérivée

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	∞
$sign(x^2)$	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$sign(x^2-1)$	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$sign(3x^2-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
$sign(f'(x))$	+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+

Dérivée seconde

$$f''(x) = 3\left(\frac{x^4 - x^2}{(3x^2 - 1)^2}\right)' = 3\,\frac{(4x^3 - 2x)(3x^2 - 1)^2 - (x^4 - x^2)\,2\,(3x^2 - 1)(6x)}{(3x^2 - 1)^4} =$$

$$3\,\frac{2x(3x^2 - 1)\left((2x^2 - 1)(3x^2 - 1) - (x^4 - x^2)\,6\right)}{(3x^2 - 1)^4} = \frac{6x(x^2 + 1)}{(3x^2 - 1)^3}$$

Signe de la dérivée seconde

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞
$sign(6x)$	−	−	−	0	+	+	+
$sign(x^2+1)$	+	+	+	+	+	+	+
$sign(3x^2-1)^3$	+	0	−	−	−	0	+
$sign(f''(x))$	−	‖	+	0	−	‖	+

Tableau de variations

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	∞
$sign(f'(x))$	+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+
$sign(f''(x))$	−	−	−	‖	+	0	−	‖	+	+	+
$Var(f)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Extremums et points d'inflexion

$$f(-1) = 0 \qquad \text{max. en } (-1;\ 0)$$

$$f(1) = 1 \qquad \text{min. en } (1;\ 1)$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{P.I. en } \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$$

Asymptotes verticales

$$\lim_{x \uparrow -\sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{neg}{neg \cdot (0^-)} + \frac{1}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow -\sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{neg}{neg \cdot (0^+)} + \frac{1}{2} = +\infty$$

$\Longrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ est asymptote verticale double

$$\lim_{x \uparrow \sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{pos}{(0^-) \cdot pos} + \frac{1}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow \sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^3}{3\left(x-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{pos}{(0^+) \cdot pos} + \frac{1}{2} = +\infty$$

$\Longrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ est asymptote verticale double

Asymptote affine

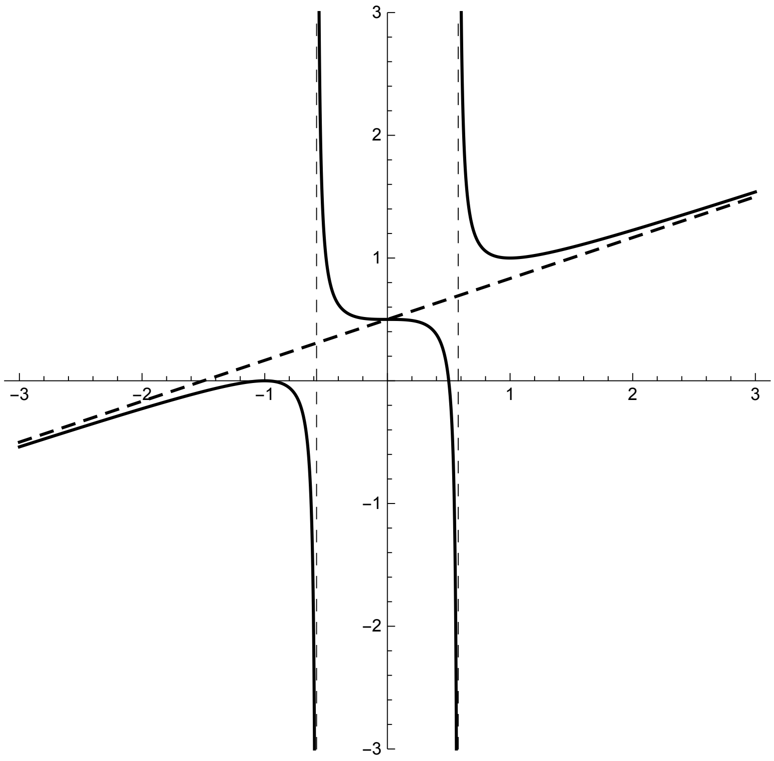
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{3x^2-1} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{3}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - a\,x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-1} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right) =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^3 + 3(3x^2-1) - 2x(3x^2-1)}{6(3x^2-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{9x^2 + 2x - 3}{6(3x^2-1)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique double

Graphique


3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3