

Étude d'une fonction polynomiale - Exercice r0-01

Discuter, en fonction du paramètre réel m , le nombre de racines de l'équation

$$x^3 + 2x^2 = 8x + m$$

Directive : Faire une étude complète la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$, puis discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

[Liste d'exercices corrigés: études de fractions rationnelles](http://www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/fractions-rationnelles/index.html)

www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/fractions-rationnelles/index.html

Corrigé

Étude de la fonction $f(x)$

Ensemble de définition de $f : x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (-2 + x)x(4 + x)$$

Signe($f(x)$) :	négatif pour	$x < -4$ ou $0 < x < 2$
	nul pour	$x = -4$ ou $x = 0$ ou $x = 2$
	positif pour	$-4 < x < 0$ ou $x > 2$

$$f'(x) = -8 + 4x + 3x^2$$

Signe($f'(x)$) :	négatif pour	$\frac{1}{3}(-2 - 2\sqrt{7}) < x < \frac{1}{3}(-2 + 2\sqrt{7})$
	nul pour	$x = \frac{1}{3}(-2 - 2\sqrt{7})$ ou $x = \frac{1}{3}(-2 + 2\sqrt{7})$
	positif pour	$x < \frac{1}{3}(-2 - 2\sqrt{7})$ ou $x > \frac{1}{3}(-2 + 2\sqrt{7})$

Signe($f'(x)$) :	négatif pour	$-2.4305 < x < 1.09717$
	nul pour	$x = -2.4305$ ou $x = 1.09717$
	positif pour	$x < -2.4305$ ou $x > 1.09717$

$$f''(x) = 2(2 + 3x)$$

Signe($f''(x)$) :	négatif pour	$x < -\frac{2}{3}$
	nul pour	$x = -\frac{2}{3}$
	positif pour	$x > -\frac{2}{3}$

Candidats extremums:

$$\left\{ \left(-\frac{2}{3} (1 + \sqrt{7}), \frac{16}{27} (10 + 7\sqrt{7}) \right), \left(\frac{2}{3} (-1 + \sqrt{7}), -\frac{16}{27} (-10 + 7\sqrt{7}) \right) \right\} \\ = \{(-2.4305, 16.9009), (1.09717, -5.04904)\}$$

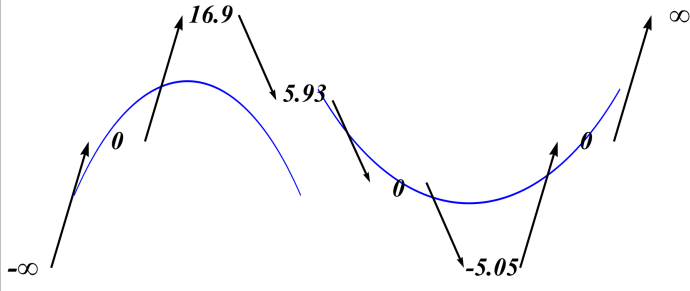
Candidat point d'inflexion : $\left\{ \left(-\frac{2}{3}, \frac{160}{27} \right) \right\}$

Aucune asymptote verticale.

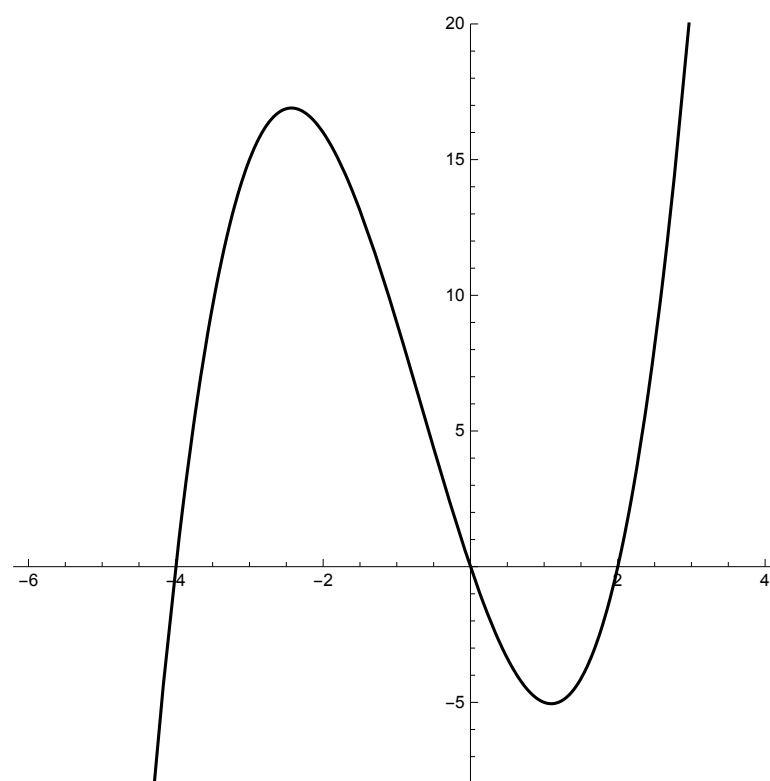
Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.

Du côté $-\infty$, pas d'asymptote affine.

Tableau de variations de la fonction

x	$-\infty$	-4	-2.431	$-2/3$	0	1.097	2	∞				
$sgn(f(x))$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$sgn(f'(x))$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$sgn(f''(x))$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$var(f(x))$												

Graphique de la fonction

Discussion de l'équation $f(x) = m$

Trois solutions x pour	$-\frac{16}{27}(-10 + 7\sqrt{7}) < m < \frac{16}{27}(10 + 7\sqrt{7})$
Deux solutions x pour	$m = -\frac{16}{27}(-10 + 7\sqrt{7})$ ou $m = \frac{16}{27}(10 + 7\sqrt{7})$
Une solution x pour	$m < -\frac{16}{27}(-10 + 7\sqrt{7})$ ou $m > \frac{16}{27}(10 + 7\sqrt{7})$

Valeurs numériques approximatives :

$$-\frac{16}{27}(-10 + 7\sqrt{7}) \approx -5.04904$$

$$\frac{16}{27}(10 + 7\sqrt{7}) \approx 16.9009$$