Étude de fonctions irrationnelles - Exercice i2-03

Étudier la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}}$$

en traitant les points suivants :

a) domaine de définition;
b) zéro(s) et signe de f;
c) limites et asymptotes (verticales et affines);
d) extremums et tableau de variations (sans faire usage de la dérivée seconde);
e) graphique.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions irrationnelles

Corrigé

a) Ensemble de définition

$$f(x) \text{ est défini} \iff \frac{-4x^3}{-x+2} \geq 0$$

x	$-\infty$		0		2		∞
Sign(-4 x^3)		+	0	−	−	−	
Sign(-x+2)		+	+	+	0	−	
Sign($\frac{-4x^3}{-x+2}$)		+	0	−	$\|$	+	

$$D_f =]-\infty; 0] \cup]2; \infty[$$

b) Signe de la fonction

$$Z_f = \{0\}$$

x	$-\infty$		0		2		∞
Sgn(f(x))		+	0	////	$\|$	+	

c) Limites et asymptotes

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \sqrt{\frac{-32}{0^-}} = \infty; \quad \text{asymptote verticale simple } x = 2$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{-4x^2}{-1+\frac{2}{x}}} = \infty; \text{ aucune asymptote horizontale}$$

$$a_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{-4}{-1+\frac{2}{x}}} = 2$$

$$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} = \lim_{x \to -\infty} (-1) \sqrt{\frac{-4}{-1+\frac{2}{x}}} = -2$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} (f(x) - a_1 x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x\right)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x\right)}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-4x^3}{-x+2} - 4x^2}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-8x^2}{(-x+2)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-8}{\left(-1+\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} + 2\right)} = 2;$$

asymptote oblique simple $y = 2x + 2$ du côté de $+\infty$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - a_2 x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} + 2x\right)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x\right)}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{-4x^3}{-x+2} - 4x^2}{\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-8x^2}{(-x+2)\left(\sqrt{\frac{-4x^3}{-x+2}} - 2x\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-8}{\left(-1+\frac{2}{x}\right)\left(-\sqrt{\frac{-4x}{-x+2}} - 2\right)} = -2;$$

asymptote oblique simple $y = -2x - 2$ du côté de $-\infty$

d) Tableau de variations

$$f'(x) = \left(\left(\frac{-4x^3}{-x+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{-4x^3}{-x+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-4x^3}{-x+2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{(-12x^2)(-x+2) - (-4x^3)(-1)}{(-x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{12x^3 - 24x^2 - 4x^3}{(-x+2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{8x^3 - 24x^2}{(-x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}} \frac{8x^2(x-3)}{(-x+2)^2} = \frac{4x^2(x-3)}{(-x+2)^2}\sqrt{\frac{-x+2}{-4x^3}}$$

$$Z_{f'} = \{3\}$$

x	$-\infty$		**0**		**2**		**3**		∞
Sign(x-3)		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
Sign(f'(x))		$-$	$\|$	$////$	$\|$	$-$	0	$+$	
Var(f)	∞	$\searrow$	0		∞	$\searrow$	$6\sqrt{3}$	$\nearrow$	∞

$$\text{min. relatif } f(3) = 6\sqrt{3} \simeq 10.39$$

$$\text{min. de bord } f(0) = 0$$

e) Graphique