Étude de fonctions irrationnelles - Corrigé de l'exercice i2-02

Dans le but de préparer l'étude de la dérivée seconde de la fonction f, étudier préalablement la fonction h et déterminer les valeurs numériques des zéros de h à la précision ± 0.05

$$h(x) = 1 - 3x + x^3$$

Étudier ensuite la fonction irrationnelle f avec usage de la dérivée seconde:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)}$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions irrationnelles

Corrigé

Étude du polynôme $h(x)$

Ensemble de définition de h : x$\in \mathbb{R}$

$$h'(x) = 3(-1 + x)(1 + x)$$

Signe$(h'(x))$:

négatif pour	$-1 < x < 1$
nul pour	$x = -1$ ou $x = 1$
positif pour	$x < -1$ ou $x > 1$

$$h''(x) = 6x$$

Signe$(h''(x))$:

négatif pour	$x < 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x > 0$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(-1, 3), (1, -1)\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0, 1)\}$

Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.

Du côté -∞, pas d'asymptote affine.

Tableau de variations de h

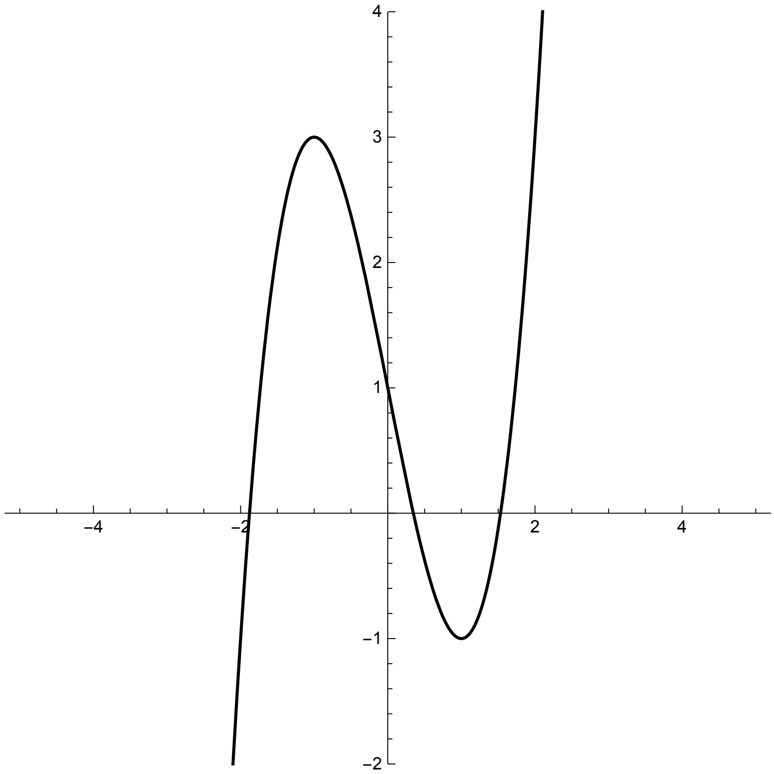
x	-∞		*-1.879*		*-1*		*0*		*0.347*		*1*		*1.532*		∞
sgn(h'(x))		+		+	*0*	−		−		−	*0*	+		+	
sgn(h''(x))		−		−		−	*0*	+		+		+		+	
var(h(x))	-∞	↗	*0*	↗	*3*	↘	*1*	↘	*0*	↘	*-1*	↗	*0*	↗	∞
sgn(h(x))		−	*0*	+		+		+	*0*	−		−	*0*	+	

Les variations de h montrent qu'elle possède exactement trois zéros dont on détermine les valeurs approchées avec une méthode numérique telle que la méthode de la bissection.
$h(x) = (-1.53209 + x)(-0.347296 + x)(1.87939 + x)$

Signe($h(x)$) :

négatif pour	$x < -1.87939$ ou $0.347296 < x < 1.53209$
nul pour	$x = -1.87939$ ou $x = 0.347296$ ou $x = 1.53209$
positif pour	$-1.87939 < x < 0.347296$ ou $x > 1.53209$

Graphique de h



Étude de la fonction irrationnelle $f(x)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{(x+1)\,(x^2 - x + 1)}$$

Ensemble de définition de f : $x < -1$ ou $x > -1$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x < -1$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$-1 < x < 0$ ou $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{(-1+x)x(1+x)^2}{\sqrt{x^2(1+x)^2}\,(1 - x + x^2)^2}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$x < -1$ ou $-1 < x < 0$ ou $x > 1$
nul pour	$x = 1$
positif pour	$0 < x < 1$

$$f''(x) = \frac{2x^3(1+x)^3\,(1 - 3x + x^3)}{(x^2(1+x)^2)^{3/2}\,(1 - x + x^2)^3} = \frac{2x^3(1+x)^3 h(x)}{(x^2(1+x)^2)^{3/2}\,(1 - x + x^2)^3}$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$x < -1.87939$ ou $-1 < x < 0$ ou $0.347296 < x < 1.53209$
nul pour	$x = -1.87939$ ou $x = 0.347296$ ou $x = 1.53209$
positif pour	$-1.87939 < x < -1$ ou $0 < x < 0.347296$ ou $x > 1.53209$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(1, 1)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion :
$\{(-1.87939, -0.293128), (0.347296, 0.449099), (1.53209, 0.84403)\}$

Du côté $+\infty$, asymptote horizontale y= 0
Du côté -∞, asymptote horizontale y= 0

Tableau de variations de f

x	$-\infty$ -1.879 -1	0 0.347 1 1.532 ∞
$sgn(f(x))$	$-$ $-$ ||	|| $+$ 0 $+$ $+$ $+$ $+$
$sgn(f'(x))$	$-$ $-$ ||	|| $-$ || $+$ $+$ 0 $-$ $-$
$sgn(f''(x))$	$-$ 0 $+$ ||	|| $-$ || $+$ 0 $-$ $-$ 0 $+$
$var(f(x))$	0 ↘ -0.293 ↘ -1/3 ||	|| 1/3 ↘ 0 ↗ 0.449 ↗ 1 ↘ 0.844 ↘ 0

Particularités:

- Aucune asymptote verticale.
- La fonction est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, \infty[$. En particulier, f est continue en $x = 0$ où $f(0) = 0$. Par contre, f est discontinue par saut en $x = -1$ où
$$\lim_{x\uparrow -1} f(x) = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{x\downarrow -1} f(x) = \frac{1}{3}$$
- La fonction n'est pas dérivable en $x = 0$

Graphique de f