Étude d'une fonction irrationnelle - Exercice i2-01

$$f(x) = x\left(\sqrt{|1-x^2|} - x\right)$$

Directive : il n'est pas demandé de faire usage de la dérivée seconde.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions irrationnelles

Corrigé

Restriction aux x tels que $1 - x^2 \geq 0$

$$f_1(x) = x\left(-x + \sqrt{1-x^2}\right)$$

Ensemble de définition de f_1 : $-1 \leq x \leq 1$

Signe(f_1(x)) :

négatif pour	$-1 \leq x < 0$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$
nul pour	$x = 0$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
positif pour	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f_1'(x) = \frac{1 - 2x^2 - 2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ou $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} < x < 1$
nul pour	$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ou $x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
positif pour	$-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} < x < \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < -0.92388$ ou $0.382683 < x < 1$
nul pour	$x = -0.92388$ ou $x = 0.382683$
positif pour	$-0.92388 < x < 0.382683$

Candidat(s) extremum(s) :

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right), \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(-0.92388, -1.20711), (0.382683, 0.207107)\}$

Du côté $+\infty$, fonction non définie.

Du côté -∞, fonction non définie.

Restriction aux x tels que $1 - x^2 \leq 0$

$$f_2(x) = x\left(-x + \sqrt{-1+x^2}\right)$$

Ensemble de définition de f_2 : $x \leq -1$ ou $x \geq 1$

Signe($f_2(x)$) :

négatif pour	$x \leq -1$ ou $x \geq 1$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

$$f_2'(x) = \frac{\left(-x + \sqrt{-1+x^2}\right)^2}{\sqrt{-1+x^2}}$$

Signe($f_2'(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x < -1$ ou $x > 1$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun

Du côté $+\infty$, asymptote horizontale y= $-\frac{1}{2}$

Du côté -∞, pas d'asymptote affine.

Traitement de la valeur absolue (fusion des deux cas)

Tableau de variations

x	-∞		-1		-0.924		0		0.383		0.707		1		∞
sgn(f(x))		−		−		−	0	+		+	0	−		−	
sgn(f'(x))		+	∞ ‖ -∞	−	0	+		+	0	−		−	-∞ ‖ ∞	+	
var(f(x))	-∞	↗	-1	↘	-1.207	↗	0	↗	0.207	↘	0	↘	-1	↗	-0.5

Particularités:

- Aucune asymptote verticale.
- La fonction est continue sur $]-\infty, \infty[$. En particulier, $f(-1) = -1$ et $f(1) = -1$
- La fonction n'est pas dérivable en $x = -1$ et en $x = 1$

Graphique