

Étude d'une fonction irrationnelle - Exercice i1-03

$$f(x) = \sqrt{|4x^2 + x|} - x$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions irrationnelles

Corrigé

Restriction aux x tels que $4x^2 + x \geq 0$

$$f_1(x) = -x + \sqrt{x(1+4x)}$$

Ensemble de définition de f_1 : $x \leq -\frac{1}{4}$ ou $x \geq 0$

Signe($f_1(x)$) :	négatif pour	$x \in \{\}$
	nul pour	$x = 0$
	positif pour	$x \leq -\frac{1}{4}$ ou $x > 0$

$$f_1'(x) = -\frac{-1 - 8x + 2\sqrt{x(1+4x)}}{2\sqrt{x(1+4x)}}$$

Signe($f_1'(x)$) :	négatif pour	$x < -\frac{1}{4}$
	nul pour	$x \in \{\}$
	positif pour	$x > 0$

$$f_1''(x) = \frac{(-1 - 8x + 4\sqrt{x(1+4x)}) (1 + 8x + 4\sqrt{x(1+4x)})}{4(x(1+4x))^{3/2}}$$

Signe($f_1''(x)$) :	négatif pour	$x < -\frac{1}{4}$ ou $x > 0$
	nul pour	$x \in \{\}$
	positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

Du côté $+\infty$, asymptote affine $y = (1)x + (\frac{1}{4})$

Du côté $-\infty$, asymptote affine $y = (-3)x + (-\frac{1}{4})$

Restriction aux x tels que $4x^2 + x \leq 0$

$$f_2(x) = -x + \sqrt{-x(1+4x)}$$

Ensemble de définition de f_2 : $-\frac{1}{4} \leq x \leq 0$

Signe($f_2(x)$) :	négatif pour	$x \in \{\}$
	nul pour	$x = 0$
	positif pour	$-\frac{1}{4} \leq x < 0$

$$f_2'(x) = -\frac{1 + 8x + 2\sqrt{-x(1+4x)}}{2\sqrt{-x(1+4x)}}$$

Signe($f_2'(x)$) :	négatif pour	$\frac{1}{40}(-5 - \sqrt{5}) < x < 0$
	nul pour	$x = \frac{1}{40}(-5 - \sqrt{5})$
	positif pour	$-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{40}(-5 - \sqrt{5})$

Signe($f_2'(x)$) :	négatif pour	$-0.180902 < x < 0$
	nul pour	$x = -0.180902$
	positif pour	$-0.25 < x < -0.180902$

$$f_2''(x) = -\frac{1}{4(-x(1+4x))^{3/2}}$$

Signe($f_2''(x)$) :	négatif pour	$-\frac{1}{4} < x < 0$
	nul pour	$x \in \{\}$
	positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) :

$$\left\{ \left(\frac{1}{40}(-5 - \sqrt{5}), \frac{1}{40}(5 + \sqrt{5}) + \sqrt{-\frac{1}{400}(-5 - \sqrt{5})^2 + \frac{1}{40}(5 + \sqrt{5})} \right) \right\}$$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(-0.180902, 0.404508)\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

Du côté $+\infty$, fonction non définie.

Du côté $-\infty$, fonction non définie.

Traitement de la valeur absolue (fusion des deux cas)

Tableau de variations

x	$-\infty$	-0.25	-0.181	0	∞		
$sgn(f(x))$	+	+	+	+	+		
$sgn(f'(x))$	-	$-\infty$	+	0	-	$-\infty$	+
$sgn(f''(x))$	-	-	-	-	-	-	
$var(f(x))$							

Particularités:

- Aucune asymptote verticale.
- La fonction est continue sur $] -\infty, \infty[$. En particulier, $f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ et $f(0) = 0$
- La fonction n'est pas dérivable en $x = -\frac{1}{4}$ et en $x = 0$

Graphique

