Étude d'une fonction irrationnelle - Exercice i1-02

$$f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions irrationnelles

Corrigé

Restriction aux x tels que $x^2 - 1 \geq 0$

$$f_1(x) = x + \sqrt{-1 + x^2}$$

Ensemble de définition de f_1 : $x \leq -1$ ou $x \geq 1$

Signe($f_1(x)$) :

négatif pour	$x \leq -1$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \geq 1$

$$f_1'(x) = \frac{x + \sqrt{-1 + x^2}}{\sqrt{-1 + x^2}}$$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$x < -1$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x > 1$

$$f_1''(x) = \frac{\left(-x + \sqrt{-1 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{-1 + x^2}\right)}{\left(-1 + x^2\right)^{3/2}}$$

Signe($f_1''(x)$) :

négatif pour	$x < -1$ ou $x > 1$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

Du côté $+\infty$, asymptote affine y = (2)x +(0)

Du côté -∞, asymptote horizontale y= 0

Restriction aux x tels que $x^2 - 1 \leq 0$

$$f_2(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$$

Ensemble de définition de f_2 : $-1 \leq x \leq 1$

Signe($f_2(x)$) :

négatif pour	$-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$
nul pour	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
positif pour	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$

$$f_2'(x) = \frac{-x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Signe($f_2'(x)$) :

négatif pour	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$
nul pour	$x == \frac{1}{\sqrt{2}}$
positif pour	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f_2''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Signe($f_2''(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 1$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right\}\right\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

Du côté $+\infty$, fonction non définie.

Du côté -∞, fonction non définie.

Traitement de la valeur absolue (fusion des deux cas)

Tableau de variations

x	-∞ -1 -0.707 0.707 1 ∞
sgn(f(x))	− − − − *0* + + + + + +
sgn(f'(x))	− -∞ ‖ ∞ + + + *0* − -∞ ‖ ∞ +
sgn(f''(x))	− ‖ − − − − − ‖ −
var(f(x))	*0* *-1* *0* *1.414* *1* ∞

Particularités:

- Aucune asymptote verticale.
- La fonction est continue sur $]-\infty, \infty[$. En particulier, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$
- La fonction n'est pas dérivable en $x = -1$ et en $x = 1$

Graphique