Étude d'une fonction irrationnelle - Exercice i1-01

$$f(x) = x\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions irrationnelles

Corrigé

Restriction aux x tels que $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$

$$f_1(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Ensemble de définition de f_1 : $-1 < x \leq 1$

Signe($f_1(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 0$
nul pour	$x = 0$ ou $x = 1$
positif pour	$0 < x < 1$

$$f_1'(x) = \frac{1-x-x^2}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1+x)^2}$$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right) < x < 1$
nul pour	$x = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$
positif pour	$-1 < x < \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$0.618034 < x < 1$
nul pour	$x = 0.618034$
positif pour	$-1 < x < 0.618034$

$$f_1''(x) = -\frac{2-x}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{3/2}(1+x)^4}$$

Signe($f_1''(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 1$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)}}\right)\right\}$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(0.618034, 0.300283)\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

Du côté $+\infty$, fonction non définie.

Du côté -∞, fonction non définie.

Restriction aux x tels que $\frac{1-x}{1+x} \leq 0$

$$f_2(x) = x\sqrt{\frac{-1+x}{1+x}}$$

Ensemble de définition de f_2 : $x < -1$ ou $x \geq 1$

Signe($f_2(x)$) :

négatif pour	$x < -1$
nul pour	$x = 1$
positif pour	$x > 1$

$$f_2'(x) = \frac{-1+x+x^2}{\sqrt{\frac{-1+x}{1+x}}(1+x)^2}$$

Signe($f_2'(x)$) :

négatif pour	$\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right) < x < -1$
nul pour	$x = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)$
positif pour	$x < \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)$ ou $x > 1$

Signe($f_2'(x)$) :

négatif pour	$-1.61803 < x < -1$
nul pour	$x = -1.61803$
positif pour	$x < -1.61803$ ou $x > 1$

$$f_2\text{"(x)} = \frac{-2+x}{\left(\frac{-1+x}{1+x}\right)^{3/2}(1+x)^4}$$

Signe($f_2''(x)$) :

négatif pour	$x < -1$ ou $1 < x < 2$
nul pour	$x = 2$
positif pour	$x > 2$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}{-1+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}}\right)\right\}$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(-1.61803, -3.33019)\}$

Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\left\{\left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

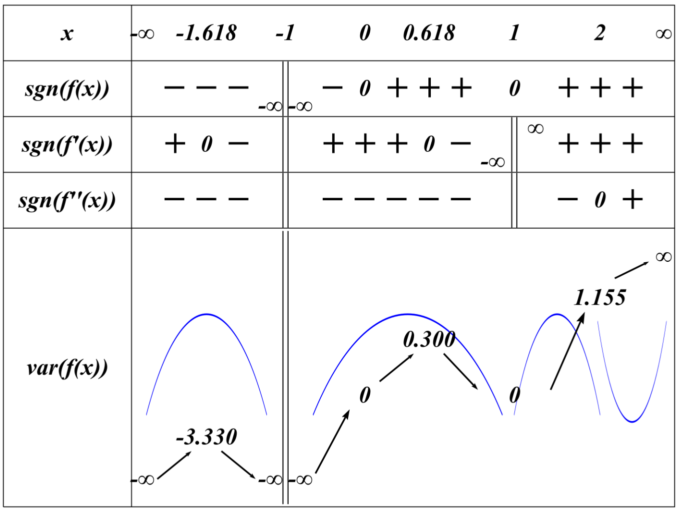
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(2, 1.1547\})$

Du côté $+\infty$, asymptote affine y = (1)x +(− 1)

Du côté -∞, asymptote affine y = (1)x +(− 1)

Traitement de la valeur absolue (fusion des deux cas)

Tableau de variations



Particularités:

- Asymptote verticale $x = -1$
- La fonction est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, \infty[$. En particulier, $f(1) = 0$
- La fonction n'est pas dérivable en $x = 1$

Graphique