

Étude d'une fonction irrationnelle - Exercice i0-01

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 4x|}}{x}$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions irrationnelles

Corrigé

Restriction aux x tels que $x^2 - 4x \geq 0$

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{(-4+x)x}}{x}$$

Ensemble de définition de f_1 : $x < 0$ ou $x \geq 4$

Signe($f_1(x)$) :	négatif pour	$x < 0$
	nul pour	$x = 4$
	positif pour	$x > 4$

$$f_1'(x) = \frac{2}{x\sqrt{(-4+x)x}}$$

Signe($f_1'(x)$) :	négatif pour	$x < 0$
	nul pour	$x \in \{\}$
	positif pour	$x > 4$

$$f_1''(x) = -\frac{4(-3+x)}{x((-4+x)x)^{3/2}}$$

Signe($f_1''(x)$) :	négatif pour	$x < 0$ ou $x > 4$
	nul pour	$x \in \{\}$
	positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

Du côté $+\infty$, asymptote horizontale $y= 1$

Du côté $-\infty$, asymptote horizontale $y= -1$

Restriction aux x tels que $x^2 - 4x \leq 0$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{-(-4+x)x}}{x}$$

Ensemble de définition de f_2 : $0 < x \leq 4$

Signe($f_2(x)$) :	négatif pour	$x \in \{\}$
	nul pour	$x = 4$
	positif pour	$0 < x < 4$

$$f_2'(x) = -\frac{2}{x\sqrt{-(-4+x)x}}$$

Signe($f_2'(x)$) :	négatif pour	$0 < x < 4$
	nul pour	$x \in \{\}$
	positif pour	$x \in \{\}$

$$f_2''(x) = -\frac{4(-3+x)}{x(-(-4+x)x)^{3/2}}$$

Signe($f_2''(x)$) :	négatif pour	$3 < x < 4$
	nul pour	$x = 3$
	positif pour	$0 < x < 3$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun

Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\left\{ \left(3, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$

Du côté $+\infty$, fonction non définie.

Du côté $-\infty$, fonction non définie.

Traitement de la valeur absolue (fusion des deux cas)

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	3	4	∞
$sgn(f(x))$	-		+ + +	0	+
$sgn(f'(x))$	-		- - -	$-\infty$	∞ +
$sgn(f''(x))$	-		+ 0 -		-
$var(f(x))$					

Particularités:

- Asymptote verticale $x = 0$
- La fonction est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$. En particulier, $f(4) = 0$
- La fonction n'est pas dérivable en $x = 4$.

