Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el3-04

a) Faire une étude complète de la fonction h en reportant la détermination des zéros à la fin de l'étude

$$h(x) = 1 + x^2 + \ln(x)$$

Directive : Déterminer le zéro (ou les zéros) de h à la précision $\pm$ 0.05
b) Faire une étude de la fonction f sans faire usage de la dérivée seconde

$$f(x) = \frac{x \ln(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Indication : le signe de h est utile dans l'établissement du signe de la dérivée de f.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Étude de la fonction h

Ensemble de définition de h : $x > 0$

$$h'(x) = \frac{1+2x^2}{x}$$

Signe($h'(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x > 0$

$$h''(x) = \frac{-1+2x^2}{x^2}$$

Signe($h''(x)$) :

négatif pour	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$
nul pour	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
positif pour	$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} - \frac{\ln(2)}{2}\right)\right\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0.707107, 1.15343)\}$

$\lim_{x\downarrow 0} h(x) = -\infty$. Asymptote verticale simple $x = 0$
$\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$. Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations de h

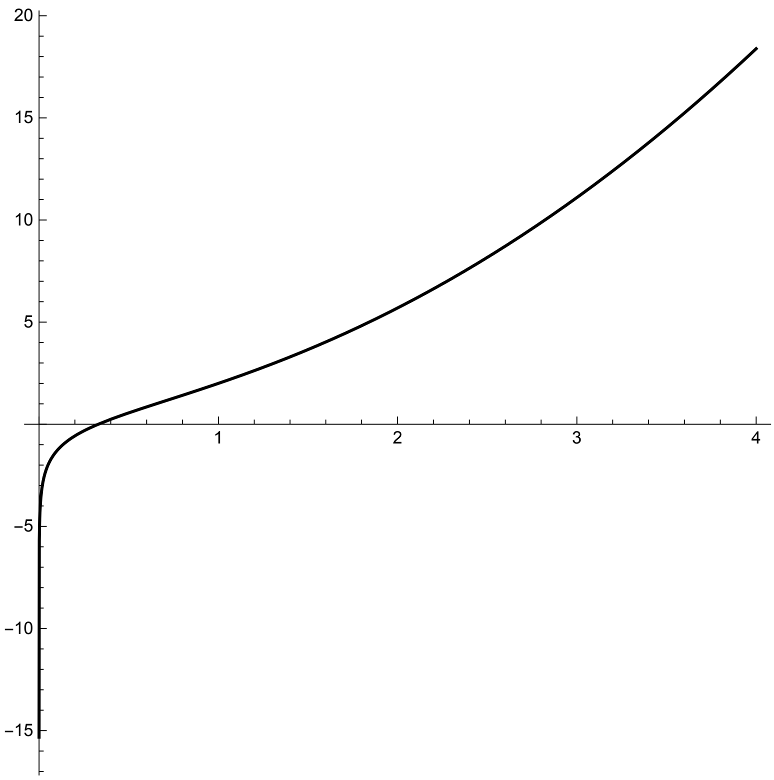
x	0		0.330		0.707		∞
sgn(h'(x))		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
sgn(h''(x))		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
var(h(x))	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1.153	$\nearrow$	∞
sgn(h(x))		$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Les variations de h montrent que la fonction possède un et un seul zéro dont on peut calculer la valeur au moyen d'une méthode numérique, par exemple avec la méthode de la bissection.

Signe(h(x)) :

négatif pour	$0 < x < 0.329936$
nul pour	$x = 0.329936$
positif pour	$x > 0.329936$

Graphique de h



Étude de la fonction f

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ensemble de définition de f : $x > 0$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 1$
nul pour	$x = 1$
positif pour	$x > 1$

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 + \ln(x)}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{h(x)}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 0.329936$
nul pour	$x = 0.329936$
positif pour	$x > 0.329936$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(0.329936, -0.34743)\}$

$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$. Aucune asymptote verticale.
Du côté $+\infty$, direction asymptotique nulle et $f(x) \longrightarrow \infty$
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations de f

x	*0*		*0.330*		*1*		∞
sgn(f(x))		−	−	−	*0*	+	
sgn(f'(x))		−	*0*	+	+	+	
var(f(x))	*0*		*-0.347*		*0*		∞

Graphique de f