

## Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

### Exercice el3-03

a) Étudier la fonction  $h$  en reportant la détermination des zéros à la fin de l'étude. Déterminer le nombre de zéros de  $h$  ainsi que la valeur numérique de chacun d'eux à la précision de  $\pm 0.05$

$$h(x) = 2 - x - 2 \ln(1 + x)$$

b) Faire une étude complète de la fonction

$$f(x) = \frac{x \ln(x + 1)}{x + 1}$$

Indication : le signe de  $h$  est utile pour déterminer le signe de la dérivée seconde de  $f$ .

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques  
[www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html](http://www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html)

## Corrigé

### Étude de la fonction $h$

Ensemble de définition de  $h$  :  $x > -1$

$$h'(x) = -\frac{3+x}{1+x}$$

|                    |              |              |
|--------------------|--------------|--------------|
| Signe( $h'(x)$ ) : | négatif pour | $x > -1$     |
|                    | nul pour     | $x \in \{\}$ |
|                    | positif pour | $x \in \{\}$ |

$$h''(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$$

|                     |              |              |
|---------------------|--------------|--------------|
| Signe( $h''(x)$ ) : | négatif pour | $x \in \{\}$ |
|                     | nul pour     | $x \in \{\}$ |
|                     | positif pour | $x > -1$     |

Candidat(s) extremum(s) : Aucun

Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

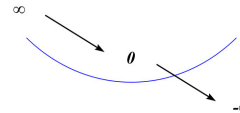
$\lim_{x \downarrow -1} h(x) = \infty$ . Asymptote verticale simple  $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$

Du côté  $+\infty$ , pas d'asymptote affine (direction asymptotique =  $-1$ )

Du côté  $-\infty$ , fonction  $h$  non définie.

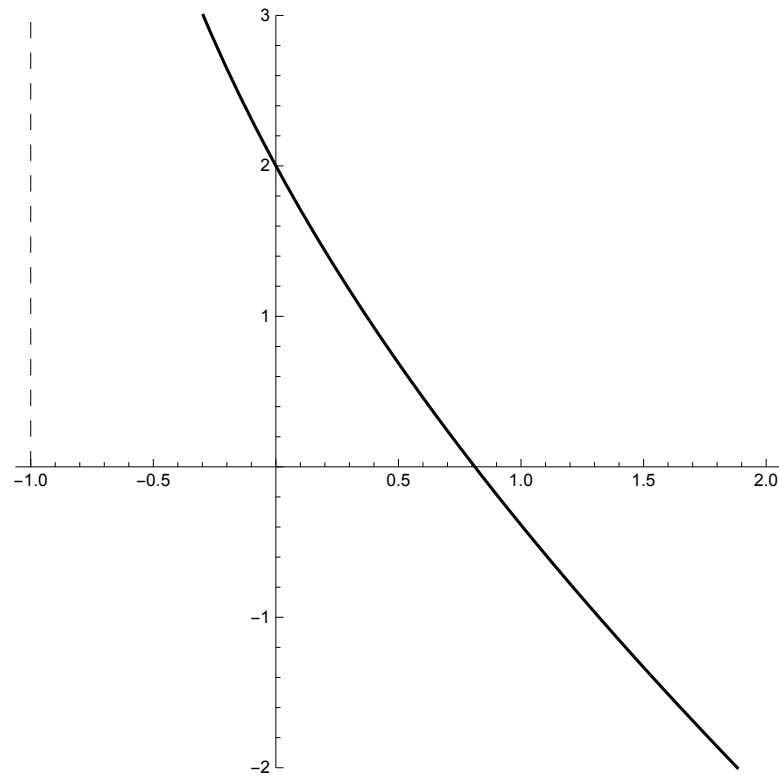
Tableau de variations de  $h$

| $x$           | $-1$ | $0.812$                                                                              | $\infty$ |
|---------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| $sgn(h'(x))$  |      | -                                                                                    | -        |
| $sgn(h''(x))$ |      | +                                                                                    | +        |
| $var(h(x))$   |      |  |          |
| $sgn(h(x))$   |      | +                                                                                    | -        |

Des variations de  $h$ , on déduit que la fonction possède un et un seul zéro dont la valeur peut être déterminée au moyen d'une méthode numérique, par exemple la méthode de la bissection.

|                   |              |                    |
|-------------------|--------------|--------------------|
| Signe( $h(x)$ ) : | négatif pour | $x > 0.81159$      |
|                   | nul pour     | $x = 0.81159$      |
|                   | positif pour | $-1 < x < 0.81159$ |

Graphique de  $h$



**Étude de la fonction  $f$**

$$f(x) = \frac{x \ln(1+x)}{1+x}$$

Ensemble de définition de  $f : x > -1$

|                   |              |                         |
|-------------------|--------------|-------------------------|
| Signe( $f(x)$ ) : | négatif pour | $x \in \{\}$            |
|                   | nul pour     | $x = 0$                 |
|                   | positif pour | $-1 < x < 0$ ou $x > 0$ |

$$f'(x) = \frac{x + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

|                    |              |              |
|--------------------|--------------|--------------|
| Signe( $f'(x)$ ) : | négatif pour | $-1 < x < 0$ |
|                    | nul pour     | $x = 0$      |
|                    | positif pour | $x > 0$      |

$$f''(x) = -\frac{-2 + x + 2 \ln(1+x)}{(1+x)^3} = \frac{h(x)}{(1+x)^3}$$

|                     |              |                    |
|---------------------|--------------|--------------------|
| Signe( $f''(x)$ ) : | négatif pour | $x > 0.81159$      |
|                     | nul pour     | $x = 0.81159$      |
|                     | positif pour | $-1 < x < 0.81159$ |

Candidat(s) extremum(s) :  $\{(0, 0)\}$

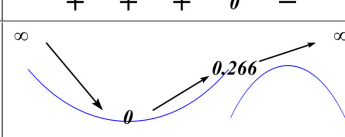
Candidat(s) point(s) d'inflexion :  $\{(0.81159, 0.266203)\}$

$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \infty$ . Asymptote verticale simple  $x = -1$

Du côté  $+\infty$ , direction asymptotique nulle et  $f(x) \rightarrow \infty$

Du côté  $-\infty$ , fonction non définie.

Tableau de variations de  $f$

| $x$           | $-1$ | $0$                                                                                | $0.812$ | $\infty$ |     |     |
|---------------|------|------------------------------------------------------------------------------------|---------|----------|-----|-----|
| $sgn(f(x))$   |      | $+$                                                                                | $0$     | $+$      | $+$ |     |
| $sgn(f'(x))$  |      | $-$                                                                                | $0$     | $+$      | $+$ |     |
| $sgn(f''(x))$ |      | $+$                                                                                | $+$     | $+$      | $0$ | $-$ |
| $var(f(x))$   |      |  |         |          |     |     |

Graphique de  $f$

