Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el2-03

$$f(x) = x\left(\ln^2|x| - 2\ln|x|\right)$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

La fonction est impaire, car $f(-x) = -f(x)$.

Restriction aux $x > 0$

$$f_1(x) = x\left(\ln^2(x) - 2\ln(x)\right)$$

Ensemble de définition de f_1 : $x > 0$
$f_1(x) = x(-2 + \ln(x))\ln(x)$

Signe($f_1(x)$) :

négatif pour	$1 < x < e^2$
nul pour	$x = 1$ ou $x = e^2$
positif pour	$0 < x < 1$ ou $x > e^2$

$$f_1'(x) = -2 + (\ln(x))^2$$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}}$
nul pour	$x = e^{-\sqrt{2}}$ ou $x = e^{\sqrt{2}}$
positif pour	$0 < x < e^{-\sqrt{2}}$ ou $x > e^{\sqrt{2}}$

$$f_1''(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

Signe($f_1''(x)$) :

négatif pour	$0 < x < 1$
nul pour	$x = 1$
positif pour	$x > 1$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(e^{-\sqrt{2}}, 2\left(1+\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}\right), \left(e^{\sqrt{2}}, -2\left(-1+\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}\right)\right\}$
Candidat(s) extremum(s) : $\{(0.243117, 1.17387), (4.11325, -3.40753)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(1, 0)\}$
Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
Du côté -∞, fonction f_1 non définie.

Facultativement puisque la fonction f est impaire: restriction aux $x < 0$

$$f_2(x) = x\left(\ln^2(-x) - 2\ln(-x)\right)$$

Ensemble de définition de f_2 : $x < 0$
$f_2(x) = x(-2 + \ln(-x))\ln(-x)$

Signe(f_2(x)) :

négatif pour	$x < -e^2$ ou $-1 < x < 0$
nul pour	$x = -e^2$ ou $x = -1$
positif pour	$-e^2 < x < -1$

$$f_2'(x) = -2 + (\ln(-x))^2$$

Signe($f_2'(x)$) :

négatif pour	$-\mathrm{e}^{\sqrt{2}} < x < -\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$
nul pour	$x = -\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ ou $x = -\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$
positif pour	$x < -\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ ou $-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} < x < 0$

$$f_2''(x) = \frac{2\ln(-x)}{x}$$

Signe($f_2''(x)$) :

négatif pour	$x < -1$
nul pour	$x = -1$
positif pour	$-1 < x < 0$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(-\mathrm{e}^{\sqrt{2}}, 2\left(-1+\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right), \left(-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, -2\left(1+\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right)\right\}$
Candidat(s) extremum(s) : $\{(-4.11325, 3.40753), (-0.243117, -1.17387)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(-1, 0)\}$
Du côté $+\infty$, fonction f_2 non définie.
Du côté -∞, pas d'asymptote affine.

Traitement de la valeur absolue (raccordement des deux cas)

f n'est pas définie en $x = 0$.
$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Le graphe de la fonction comporte un trou en $(0, 0)$.
Aucune asymptote verticale.
Pour la dérivée, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$
$(0, 0)$ n'est pas un point d'inflexion de la fonction f. Cependant, dans le prolongement continu de f obtenu en ajoutant le point $(0, 0)$ à son graphe, $(0, 0)$ serait un point d'inflexion et la tangente y serait verticale.

Tableau de variations de la fonction f

x		*0*		*0.243*		*1*		*4.113*		*7.389*	*∞*
	Symétrie centrale de centre O(0, 0)										
sgn(f(x))	...	+	+	+	*0*	−	−	−	*0*	+	
sgn(f'(x))	...	+	*0*	−	−	−	*0*	+	+	+	
sgn(f''(x))	...	−	−	−	*0*	+	+	+	+	+	
var(f(x))	...	*0* ↗	*1.174*	↘ *0*		↘	*-3.408*	↗ *0*		↗	*∞*

Graphique