Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el2-02

$$f(x) = 4x \ln |2x|$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Fonction impaire, car $f(-x) = -f(x)$.

Restriction aux $x > 0$

$$f_1(x) = 4x \ln(2x)$$

Ensemble de définition de f_1 : $x > 0$

Signe($f_1(x)$) :

négatif pour	$0 < x < \frac{1}{2}$
nul pour	$x = \frac{1}{2}$
positif pour	$x > \frac{1}{2}$

$$f_1'(x) = 4(1 + \ln(2x))$$

Signe($f_1'(x)$) :

négatif pour	$0 < x < \frac{1}{2e}$
nul pour	$x = \frac{1}{2e}$
positif pour	$x > \frac{1}{2e}$

$$f_1''(x) = \frac{4}{x}$$

Signe($f_1''(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x > 0$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(\frac{1}{2e}, -\frac{2}{e}\right)\right\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
Du côté -∞, fonction f_1 non définie.

Facultativement puisque la fonction f est impaire: restriction aux $x < 0$

$$f_2(x) = 4x \ln(-2x)$$

Ensemble de définition de f_2 : $x < 0$

Signe($f_2(x)$) :

négatif pour	$x < -\frac{1}{2}$
nul pour	$x = -\frac{1}{2}$
positif pour	$-\frac{1}{2} < x < 0$

$$f_2'(x) = 4(1 + \ln(-2x))$$

Signe($f_2'(x)$) :

négatif pour	$-\frac{1}{2e} < x < 0$
nul pour	$x = -\frac{1}{2e}$
positif pour	$x < -\frac{1}{2e}$

$$f_2''(x) = \frac{4}{x}$$

Signe($f_2''(x)$) :

négatif pour	$x < 0$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(-\frac{1}{2\mathrm{e}}, \frac{2}{e}\right)\right\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun
Du côté $+\infty$, fonction f_2 non définie.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Du côté -$\infty$, pas d'asymptote affine.

Traitement de la valeur absolue (raccordement des deux cas)

La fonction n'est pas définie en $x = 0$.
$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Le graphe de la fonction comporte un trou en $(0, 0)$.
Aucune asymptote verticale.
Pour la dérivée, $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$
La fonction f n'a pas de point d'inflexion. Cependant, dans le prolongement continu de f obtenu en ajoutant le point $(0, 0)$ à son graphe, $(0, 0)$ serait un point d'inflexion et la tangente y serait verticale.

Tableau de variations de f

x	-∞ ***-0.5*** ***-0.184*** ***0***	***0.184*** ***0.5*** ∞
	Symétrie centrale de centre O(0, 0)	
sgn(f(x))	− *0* + + +	− − − *0* +
sgn(f'(x))	+ + + *0* −	− *0* + + +
sgn(f''(x))	− − − − −	+ + + + +
var(f(x))	-∞ ↗ *0* ↗ ***0.736*** ↘ *0*	*0* ↘ ***-0.736*** ↗ *0* ↗ ∞

Graphique de f