Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el1-19

Étudier la fonction h. Reporter l'étude du signe de h en fin d'étude.

$$h(x) = x - \ln(1+x) - x\ln(1+x)$$

Étudier la fonction f

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Indications

- Les résultats de l'étude de h sont utiles pour déterminer le signe de la dérivée de f.
- Développer une méthode semblable pour étudier le signe de la dérivée seconde de f.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Étude de la fonction h

Ensemble de définition de h : $x > -1$

$$h'(x) = -\ln(1+x)$$

Signe$(h'(x))$:

négatif pour	$x > 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$-1 < x < 0$

$$h''(x) = -\frac{1}{1+x}$$

Signe$(h''(x))$:

négatif pour	$x > -1$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(0,0)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations de la fonction h

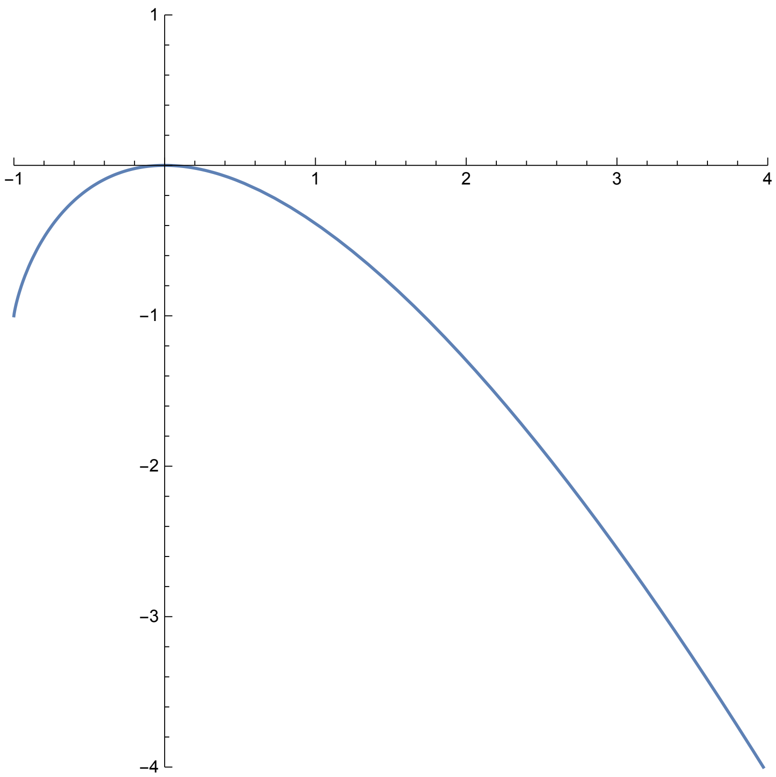
x	***-1***		***0***		∞
sgn(h'(x))	$\Vert$	$+$	***0***	$-$	
sgn(h''(x))	$\Vert$	$-$	$-$	$-$	
var(h(x))	$\Vert$ ***-1***	$\nearrow$	***0***	$\searrow$	***-*** ∞
sgn(h(x))	$\Vert$	$-$	***0***	$-$	

Le signe de h se déduit des variations de h (voir tableau).

Signe($h(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 0$ ou $x > 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x \in \{\}$

Graphique de la fonction h



Étude de la fonction f

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Ensemble de définition de f : $-1 < x < 0$ ou $x > 0$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$-1 < x < 0$ ou $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{-x + \ln(1+x) + x\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{h(x)}{x^2(1+x)}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 0$ ou $x > 0$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

$$f''(x) = \frac{-2x - 3x^2 + 2\ln(1+x) + 4x\ln(1+x) + 2x^2\ln(1+x)}{x^3(1+x)^2} = \frac{g(x)}{x^3(1+x)^2}$$

Voir l'étude de g plus bas, ci-dessous.

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$-1 < x < 0$ ou $x > 0$

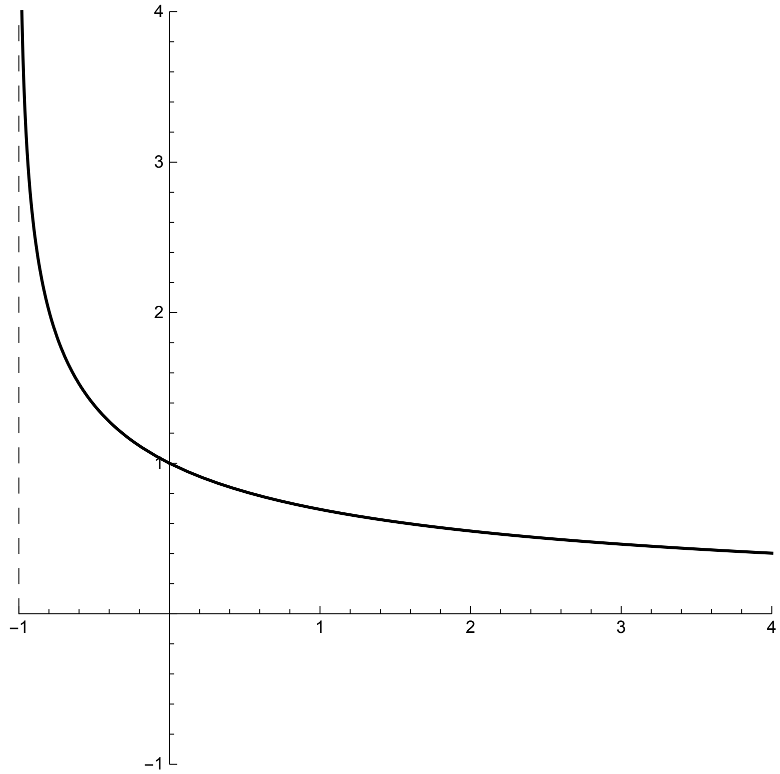
Candidat(s) extremum(s) : Aucun
Candidat(s) point(s) d'inflexion : Aucun

$\lim_{x\downarrow -1} f(x) = \infty$. Asymptote verticale simple $x = -1$
$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 0$.
Le graphe de f comporte un trou $(0, 1)$.
Du côté $+\infty$, asymptote horizontale y= 0
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations de f

x	*-1*		*0*	∞
sgn(f(x))		+		+
sgn(f'(x))		−		−
sgn(f''(x))		+		+
var(f(x))		$\infty \searrow$ *1*		*1* $\searrow$ *0*

Graphique de f



Étude de la fonction g pour déterminer le signe de la dérivée seconde de f

$$g(x) = -2x - 3x^2 + 2\ln(1+x) + 4x\ln(1+x) + 2x^2\ln(1+x)$$

Ensemble de définition de g : $x > -1$

$$g'(x) = 4(-x + \ln(1+x) + x\ln(1+x)) = -4h(x)$$

Signe($g'(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$-1 < x < 0$ ou $x > 0$

$$g''(x) = 4\ln(1+x) = -4h'(x)$$

Signe($g''(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x > 0$

Candidat(s) extremum(s) : $\{(0,0)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0,0)\}$
Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations de g

x	*-1*		*0*		∞
sgn(g'(x))	‖	$+$	*0*	$+$	
sgn(g''(x))	‖	$-$	*0*	$+$	
var(g(x))	‖ -∞	↗	*0*	↗	∞
sgn(g(x))	‖	$-$	*0*	$+$	

Le signe de g se déduit des variations de g (voir tableau).

Signe($g(x)$) :

négatif pour	$-1 < x < 0$
nul pour	$x = 0$
positif pour	$x > 0$

Graphique de g