Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el1-05

$$f(x) = -x \ln(2x - 1)$$

Indication: Déterminer le signe de la dérivée seconde avant le signe de la dérivée première.

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Ensemble de définition de f : $x > \frac{1}{2}$

$$f'(x) = -\frac{2x - \ln(-1 + 2x) + 2x \ln(-1 + 2x)}{-1 + 2x}$$

$$f''(x) = -\frac{4(-1 + x)}{(-1 + 2x)^2}$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$x > 1$
nul pour	$x = 1$
positif pour	$\frac{1}{2} < x < 1$

Ainsi, la fonction f' possède un maximum en $x = 1$. Comme ce maximum vaut $f'(1) = -2$, la dérivée est inférieure ou égale à -2 partout où elle est définie:

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$x > \frac{1}{2}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x \in \{\}$

Puisque la fonction f est strictement décroissante (sur son ensemble de définition), et que $f(1) = 0$:

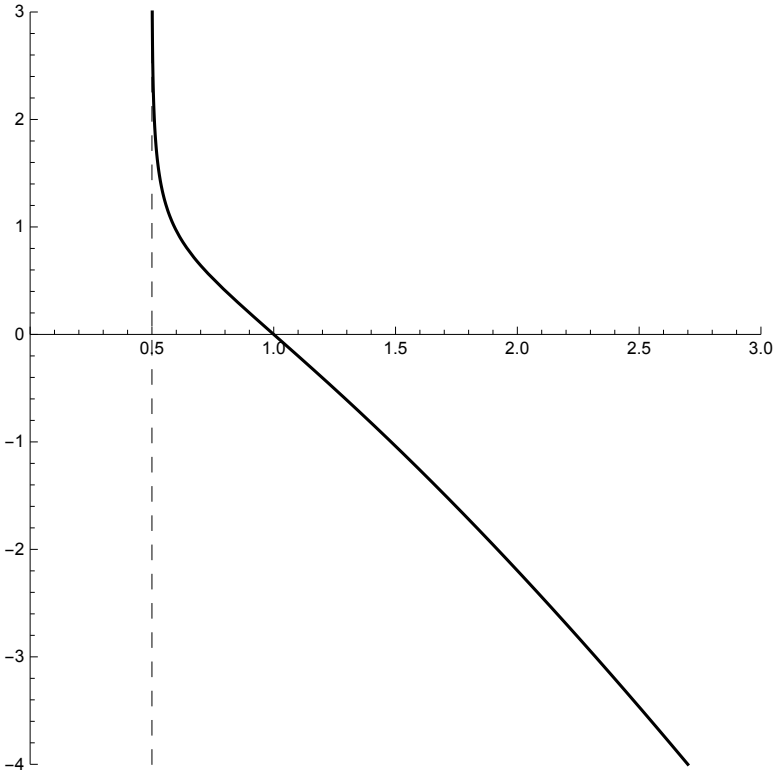
Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x > 1$
nul pour	$x = 1$
positif pour	$\frac{1}{2} < x < 1$

Candidat(s) extremum(s) : Aucun
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(1, 0)\}$

$\lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty$. Asymptote verticale simple $x = \frac{1}{2}$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$. Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine.
Du côté -∞, fonction non définie.

Tableau de variations

x	*0.5*		*1*		∞
sgn(f''(x))	‖	+	*0*	−	
sgn(f'(x))	‖	−	−	−	
sgn(f(x))	‖	+	*0*	−	
var(f(x))	‖	∞ ↘	*0*	↘	-∞

Graphique