Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el1-04

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Ensemble de définition de f : $x < 0$ ou $x > 0$

Signe($f(x)$) :

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x < 0$ ou $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{e^{-1/x}(-1+2x)}{x^4}$$

Signe($f'(x)$) :

négatif pour	$x > \frac{1}{2}$
nul pour	$x = \frac{1}{2}$
positif pour	$x < 0$ ou $0 < x < \frac{1}{2}$

$$f''(x) = \frac{e^{-1/x}\left(1 - 6x + 6x^2\right)}{x^6}$$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right) < x < \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)$
nul pour	$x = \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$ ou $x = \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)$
positif pour	$x < 0$ ou $0 < x < \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$ ou $x > \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)$

Signe($f''(x)$) :

négatif pour	$0.211325 < x < 0.788675$
nul pour	$x = 0.211325$ ou $x = 0.788675$
positif pour	$x < 0$ ou $0 < x < 0.211325$ ou $x > 0.788675$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{e^2}\right)\right\}$
Candidat(s) extremum(s) : $\{(0.5, 0.541341)\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\left\{\left(\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right), \frac{36e^{-3-\sqrt{3}}}{\left(-3+\sqrt{3}\right)^2}\right), \left(\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right), \frac{6e^{-3+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}\right)\right\}$
Candidat(s) point(s) d'inflexion : $\{(0.211325, 0.19724), (0.788675, 0.452419)\}$

Asymptote verticale simple $x = 0$, car $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \infty$. Pour la dérivée, $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = 0$ et $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = \infty$
Du côté $+\infty$, asymptote horizontale y= 0
Du côté $-\infty$, asymptote horizontale y= 0

Tableau de variations

x	-∞		0		***0.211***		***0.5***		***0.788***		∞
sgn(f(x))		+	‖	+	+	+	+	+	+	+	
sgn(f'(x))		+	‖	+	+	+	***0***	−	−	−	
sgn(f''(x))		+	‖	+	***0***	−	−	−	***0***	+	
var(f(x))	***0***		∞ ‖ ***0***		***0.197***		***0.541***		***0.452***		***0***

Graphique