Étude de fonctions exponentielles ou logarithmiques

Exercice el1-02

$$f(x) = |x|^x$$

Directive: l'usage de la dérivée seconde n'est pas demandé.
Indication: $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$ où $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

Liste d'exercices corrigés: études de fonctions exponentielles ou logarithmiques
www.deleze.name/marcel/mathematica/etude-fonctions/exp-log/index.html

Corrigé

Restriction aux $x > 0$

$$f_1(x) = x^x$$

Ensemble de définition de f_1 : $x > 0$

Signe$(f_1(x))$:

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x > 0$

$$f_1'(x) = x^x\,(1 + \ln(x))$$

Signe$(f_1'(x))$:

négatif pour	$0 < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$
nul pour	$x = \frac{1}{\mathrm{e}}$
positif pour	$x > \frac{1}{\mathrm{e}}$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}\right)\right\}$

Du côté $+\infty$, pas d'asymptote affine et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Du côté -∞, fonction non définie.

Restriction aux $x < 0$

$$f_2(x) = (-x)^x$$

Ensemble de définition de f_2 : $x < 0$

Signe$(f_2(x))$:

négatif pour	$x \in \{\}$
nul pour	$x \in \{\}$
positif pour	$x < 0$

$$f_2'(x) = (-x)^x(1 + \ln(-x))$$

Signe$(f_2'(x))$:

négatif pour	$-\frac{1}{\mathrm{e}} < x < 0$
nul pour	$x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$
positif pour	$x < -\frac{1}{\mathrm{e}}$

Candidat(s) extremum(s) : $\left\{\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)\right\}$

Du côté $+\infty$, fonction non définie.

Du côté -∞, asymptote horizontale y= 0

Traitement de la valeur absolue (fusion des deux cas)

Aucune asymptote verticale.
La fonction n'est pas définie en $x = 0$. Cependant, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Ainsi, le graphe est troué en $(0, 1)$. En ce qui concerne la dérivée, $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$
Tableau de variations

x	-∞	*-0.368*		*0*		*0.368*	∞
sgn(f(x))	+	+	+	‖	+	+	+
sgn(f'(x))	+	*0*	−	‖	−	*0*	+
var(f(x))	*0* ↗	*1.445*	↘ *1*	‖	*1* ↘	*0.692*	↗ ∞

Graphique