Division par zéro

L'inverse de 0

L'inverse du nombre réel *a*, noté

$$b=\frac{1}{a}$$

est le nombre réel *b* qui vérifie la propriété

$$a\cdot b=1$$

Par exemple, l'inverse de 5 est 0.2 car $5\cdot(0.2)=1$.
Dans le but de déterminer l'inverse de 0, noté

$$b=\frac{1}{0}$$

nous aimerions trouver le nombre *b* tel que

$$0\cdot b=1$$

Or, nous savons que, pour tout nombre réel *b*,

$$0\cdot b=0$$

Donc, il n'existe aucun nombre réel *b* tel que

$$0\cdot b=1$$

ce qui démontre que 0 n'a pas d'inverse. En résumé,

$\frac{1}{0}$ **n'existe pas**.

Éviter la confusion

Il ne faut pas confondre la question précédente avec la division de 0 par un nombre non nul, opération qui ne présente aucune difficulté particulière, par exemple:

$$\frac{0}{3}=0 \quad .$$

Application concrète

S'il faut répartir équitablement 0 Euro entre 10 personnes, la division est possible et donne le résultat suivant: chacune des 10 personnes reçoit très exactement 0 Euro.

Par contre, s'il faut répartir équitablement 100 Euros entre 0 personne, nous avons un problème. La répartition n'est pas possible : on ne peut pas dire combien chacun reçoit puisqu'il n'y a aucun «chacun». Les 100 Euros sont en déshérence !

Limites au voisinage de zéro

Limite à droite, ou limite par valeurs supérieures

Pour des valeurs de *x* tendant vers 0 par valeurs supérieures, par exemple

0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...

les inverses 1/*x* prennent les valeurs correspondantes suivantes

10, 100, 1000, 10000, ...

On exprime ce comportement en disant que «la limite de 1/x pour x tendant vers 0 par valeurs supérieures est +∞».

Limite à gauche ou limite par valeurs inférieures

Pour des valeurs de x tendant vers 0 par valeurs inférieures, par exemple

-0.1, -0.01, -0.001, -0.0001, ...

les inverses 1/x prennent les valeurs correspondantes suivantes

-10, -100, -1000, -10000, ...

On exprime ce comportement en disant que «la limite de 1/x pour x tendant vers 0 par valeurs inférieures est -∞».

Limite en 0

Pour x tendant vers 0, comment se comporte 1/x ? Lorsqu'on ne précise pas la manière dont x tend vers 0, il faut comprendre que x peut tendre vers 0 de n'importe quelle manière, par exemple

+0.1, -0.01, +0.001, -0.0001, +0.00001, ...

les inverses 1/x prennent les valeurs correspondantes suivantes

+10, -100, +1000, -10000, +100000, ...

En choisissant d'autres exemples, on obtient des comportements différents. Ainsi, il n'est pas possible de donner une valeur unique comme réponse.

On exprime ce comportement en disant que «la limite de 1/x pour x tendant vers 0 n'existe pas».

Lien hypertexte vers la page mère :

Mathématiques dans la culture générale
http://www.deleze.name/~marcel//culture/index.html