

Le développement décimal de tout nombre irrationnel est illimité et non périodique

Introduction

Voici les premières décimales du nombre $\sqrt{2}$

1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679738...

En utilisant un résultat établi antérieurement : [\sqrt{2} est irrationnel](#)
www.deleze.name/marcel/culture/Racine_de_2_est_irrationnel/racine-de-2-est-irrationnel.pdf
on peut déduire du théorème suivant que le développement décimal de $\sqrt{2}$ est illimité et non périodique.

Théorème

Le développement décimal de tout nombre irrationnel est illimité et non périodique.

Théorème équivalent (contraposition du théorème précédent)

Soit x un nombre réel. Si le développement décimal de x est fini ou (illimité et périodique), alors x est un nombre rationnel.

Idée de la démonstration dans le cas du développement décimal fini

Pour expliquer l'idée de la démonstration, prenons un exemple : $x = 84.537$;
on a donc $x = \frac{84537}{1000}$, ce qui montre que x est rationnel.
Cette idée peut être généralisée en une démonstration formelle.

Idée de la démonstration dans le cas du développement décimal illimité et périodique

Pour expliquer l'idée de la démonstration, prenons comme exemple
 $x = 4.5673673673673... = 4.\overline{5673}$.

On a $10x = 45.\overline{673}$ et $10000x = 45673.\overline{673}$ (remarquez que le point décimal est placé immédiatement devant une période et que les deux nombres ont des parties décimales identiques) d'où

$$\begin{aligned}10000x - 10x &= 45673 - 45 \\9990x &= 45628 \\x &= \frac{45628}{9990}\end{aligned}$$

ce qui montre que x est rationnel.

Cette méthode peut être généralisée en une démonstration formelle.

Règle pour le cas du développement décimal illimité et périodique

En extrayant et nommant

- ⊙ la partie décimale non périodique, ici 5, soit 1 chiffre non périodique ;
- ⊙ la partie décimale périodique, ici 673, soit 3 chiffres périodiques ;

on peut formuler une règle générale :

- ⊙ le dénominateur 9990 est formé d'autant de 9 que de chiffres périodiques, suivis d'autant de 0 que de chiffres non périodiques ;
- ⊙ le numérateur est la différence entre deux nombres formés comme suit :
 - les chiffres jusqu'à la fin de la première période, ici 45673 ;
 - les chiffres jusqu'avant la première période, ici 45.

Marcel Déleze

Lien vers la page mère : [Mathématiques dans la culture générale](#)

www.deleze.name/marcel/culture/index.html