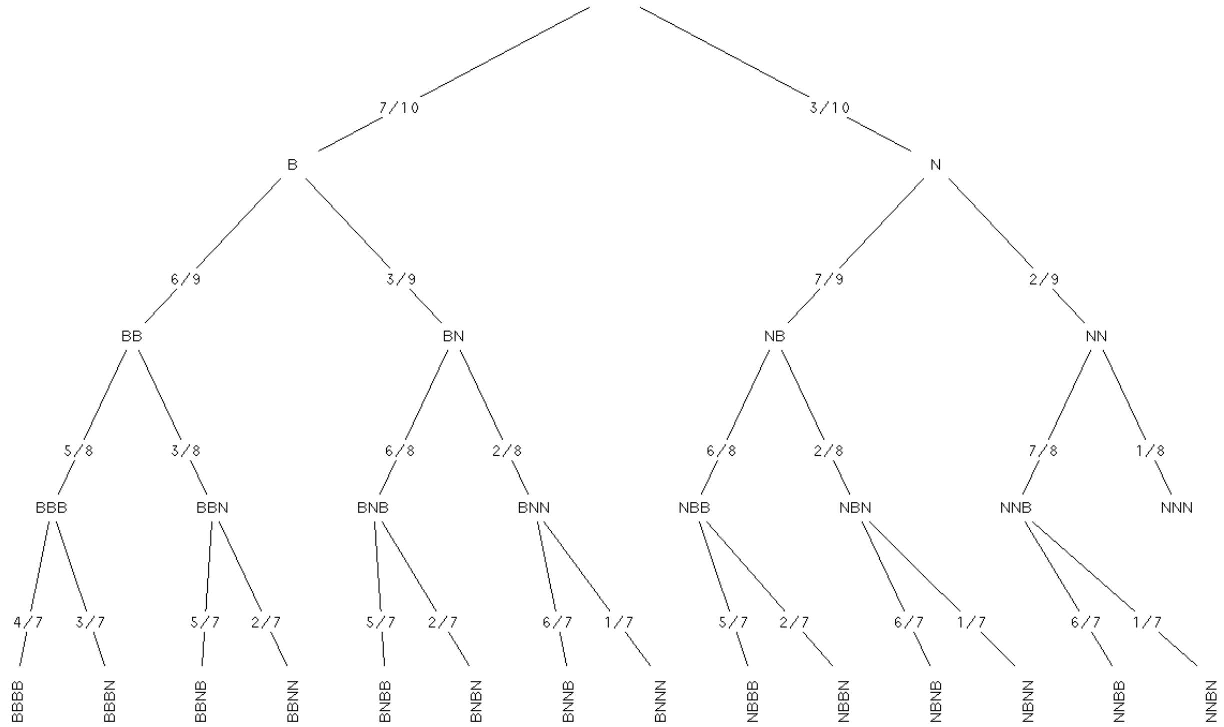
Probabilités, corrigé de l'exercice 1-12

Pour raisonner, remplaçons le « *tirage simultané de 4 boules* » par « *le tirage successif de 4 boules* ». Nous devons donc distinguer les « *tirages de boules dans un ordre donné* » des « *tirages de boules dans n'importe quel ordre* ».

Notations :

B = événement « *la boule tirée est blanche* » ;
N = événement « *la boule tirée est noire* » ;
BN = « *le première boule tirée est blanche* **et** *la deuxième est noire* ».



Partie a)

P{2 B et 2 N} = P(BBNN) + P(BNBN) + P(BNNB) + P(NBBN) + P(NBNB) + P(NNBB)
= (7/10)*(6/9)*(3/8)*(2/7) + (7/10)*(3/9)*(6/8)*(2/7) + ...

Pour d'autres problèmes semblables, devant l'impossibilité pratique de dessiner des graphiques plus compliqués, il faut généraliser. Remarquons d'abord que toutes les branches qui nous intéressent ont la même probabilité :

P{2 B et 2 N} = 6*P(BBNN)

et que 6, le nombre de branches, est donné par le coefficient binomial $\binom{4}{2}$ qui représente « d'un ensemble de 4 positions, le nombre de sous-ensembles de 2 positions pour les B ».

Le lien entre « *tirages dans n'importe quel ordre* » et « *tirages dans un ordre donné* » s'écrit donc ici

$$P\{2\,B\,et\,2\,N\} \;=\; \binom{4}{2}\times P(B\,B\,N\,N) \;=\; 6\times\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7} \;=\; \frac{3}{10}$$

Partie b)

Les événements « *tirer au moins 1 N* » et « *tirer 4 blanches* » sont complémentaires :

$$P\{au\,moins\,1\,N\} \;=\; 1 \;-\; P(BBBB) \;=\; 1 \;-\; \frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7} \;=\; \frac{5}{6}$$

$$P\{2\,B\,et\,2\,N \;|\; au\,moins\,1\,N\} \;=\; \frac{P\{2\,B\,et\,2\,N\}}{P\{au\,moins\,1\,N\}} \;=\; \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{6}} \;=\; \frac{9}{25} \;=\; 0.36$$

Partie c)

$$P\{3\,N\,et\,1\,B\} \;=\; \binom{4}{1}\times P(N\,N\,N\,B) \;=\; 4\times\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8} \;=\; \frac{1}{30}$$

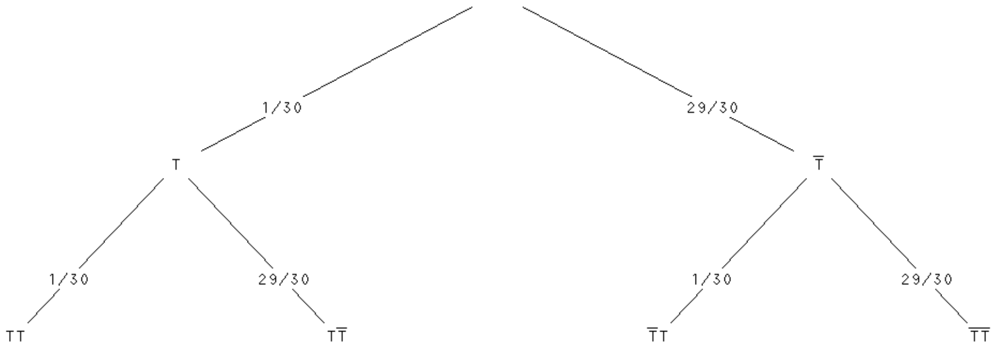
Notations :

T = événement « *tirer 3 noires et 1 B* » ;

$\overline{\text{T}}$ = événement « *on n'a pas tiré {3 N, 1 B}* » ;

T$\overline{\text{T}}$ = « *au 1-er tirage, on a {3 N, 1 B}* **et** , *au 2-ème tirage, on n'a pas {3 N, 1 B}* ».

Début de l'arbre :



Pour la compréhension : les événements « *obtenir au moins 1 T en 2 tirages* » et « *obtenir 2 fois* $\overline{T}$ *en 2 tirages* » sont complémentaires, et

P{au moins 1 fois T en 2 tirages} = 1 – P($\overline{\text{T}}\overline{\text{T}}$) = 1 – $(29/30)^2$

En généralisant, les événements « *obtenir au moins 1 T en n tirages* » et « *obtenir n fois* $\overline{T}$ *en n tirages* » sont complémentaires, et

P{au moins 1 fois T en *n* tirages} = 1 – P(tirer *n* fois $\overline{\text{T}}$ consécutivement) = 1 – $(29/30)^n$ > 0.5

c'est-à-dire qu'il faut résoudre l'inéquation $(29/30)^n < 0.5$

Première méthode : par tâtonnements,

$(29/30)^{20} = 0.50761548692356$

$(29/30)^{21} = 0.49069497069278$

Réponse : ***n* = 21**

Deuxième méthode : avec les logarithmes :

$\ln((29/30)^n) < \ln(0.5)$

$n*\ln(29/30) < \ln(0.5)$

$n > \ln(0.5)/\ln(29/30)$ Remarque : $\ln(29/30) < 0$

$n > 20.4459$ Remarque : *n* est entier

***n* >= 21**

Outil en ligne pour dessiner un arbre de probabilités composées :

https://www.deleze.name/marcel/sec2/prob/calculateur/index.html

Probabilités, énoncés des exercices :

https://www.deleze.name/marcel/sec2/prob/1/exercices-1.pdf