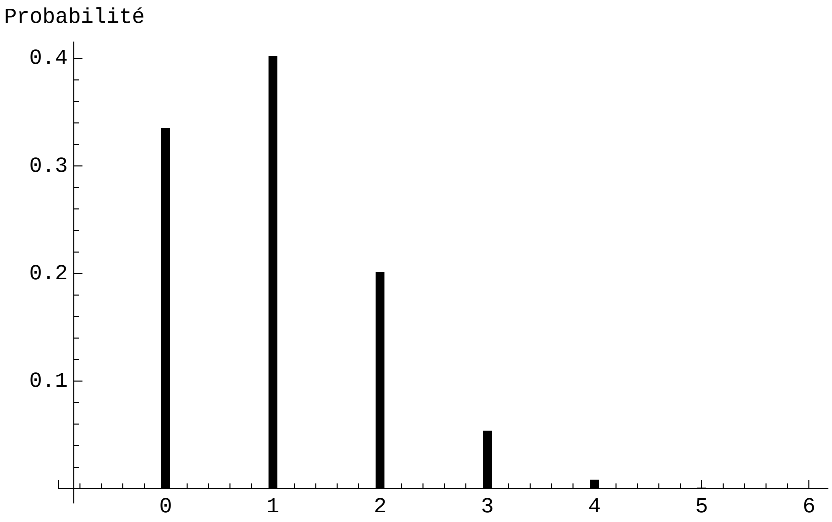
Collège du Sud
4e année

Maths niveau standard

Variables aléatoires



Edition 2003-2004
Marcel Délèze

Supports de cours de mathématiques de niveau secondaire II (page mère):
http://www.deleze.name/marcel/sec2/index.html

■ Prérequis

Nous supposons que l'élève a préalablement étudié
1° le chapitre *Statistique descriptive*;
2° le chapitre *Probabilités*.

§ 1 Variables aléatoires discrètes

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas où la variable statistique ne prend qu'un nombre fini de modalités.

§ 1.1 Notion de variable aléatoire

■ Exemple

On lance deux dés et on compte le nombre de six obtenus, c'est-à-dire

$$X = 0 \text{ avec prob. } p_0 = \frac{5}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$
$$X = 1 \text{ avec prob. } p_1 = 2 \times \frac{1}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$
$$X = 2 \text{ avec prob. } p_2 = \frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Commentaires:

Comme dans les exemples du cours *Statistique descriptive*, les modalités 0, 1, 2 sont affectées de fréquences $\frac{25}{36}, \frac{10}{36}, \frac{1}{36}$. Ici cependant, les fréquences ne proviennent pas de l'observation mais d'un modèle mathématique. Les fréquences théoriques sont appelées probabilités.

■ Variable aléatoire

Dans le § 1, nous supposons que la variable aléatoire est discrète; de plus nous supposons que la variable ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs appelées issues $x_0, x_1, ..., x_k$.

On appelle variable aléatoire une fonction qui, à chaque issue fait correspondre une probabilité $p_0, p_1, ..., p_k$.

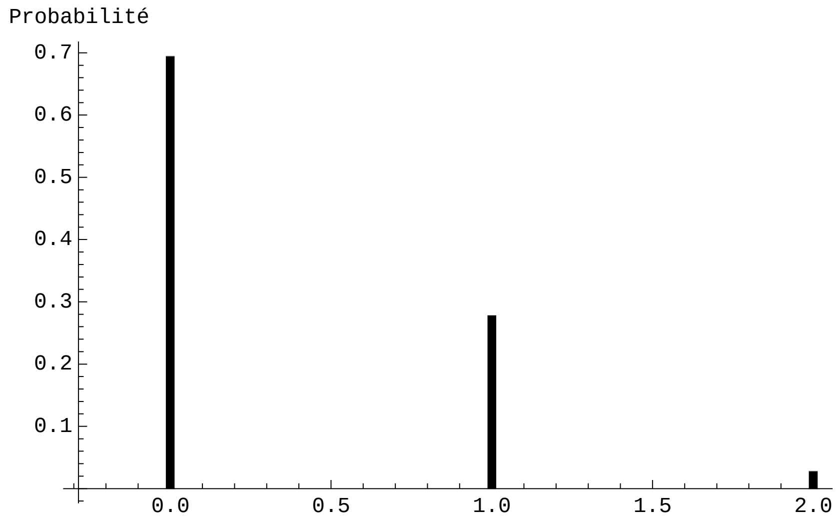
Les probabilités doivent vérifier les conditions

$$\boxed{p_0 \geq 0,\ p_1 \geq 0\ ...,\ p_k \geq 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{i=0}^{k} p_i = 1}$$

Pour l'exemple,

$$P(X = 0) = \frac{25}{36} = p_0$$
$$P(X = 1) = \frac{10}{36} = p_1$$
$$P(X = 2) = \frac{1}{36} = p_2$$

Le diagramme à bâtons de la variable aléatoire est appelé *diagramme des probabilités de X*:



Plus généralement, X désignant une variable aléatoire, la probabilité de la modalité x_i est

$$\boxed{P(X = x_i) = p_i}$$

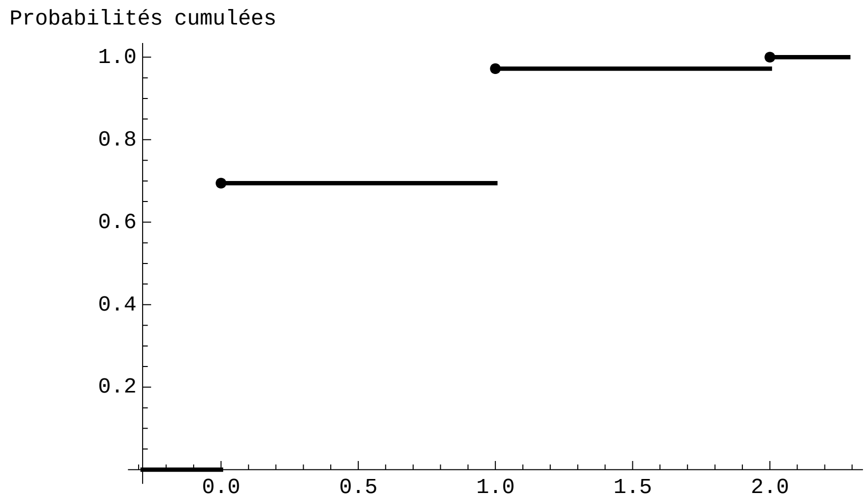
■ Fonction de répartition

Dans les exemples du cours *Statistique descriptive*, nous avons considéré la fonction *fréquences cumulées* que nous pourrions appeler ici *probabilités cumulées* mais l'usage veut que cette fonction s'appelle *fonction de répartition*:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

Pour l'exemple,

$$\begin{array}{lll} F(x) = 0 & \text{pour} & x < 0 \\ F(x) = \frac{25}{36} & \text{pour} & 0 \leqslant x < 1 \\ F(x) = \frac{35}{36} & \text{pour} & 1 \leqslant x < 2 \\ F(x) = 1 & \text{pour} & 2 \leqslant x \end{array}$$



Plus généralement, pour une variable aléatoire n'ayant qu'un nombre fini de modalités,

$$\begin{array}{rll} F(x) = 0 & \text{pour} & x < x_0 \\ F(x) = p_0 & \text{pour} & x_0 \leqslant x < x_1 \\ F(x) = p_0 + p_1 & \text{pour} & x_1 \leqslant x < x_2 \\ .. & .. & .. \\ F(x) = p_0 + ... + p_{k-1} & \text{pour} & x_{k-1} \leqslant x < x_k \\ F(x) = 1 & \text{pour} & x_k \leqslant x \end{array}$$

■ Exercice 1.1 - 1

On donne la variable aléatoire *X* définie par le tableau suivant

Modalités x_i	***Probabilités*** p_i
1	0.3
2	0.4
3	0.2
4	0.1

a) Déterminez $P(X \leq 3)$, $P(X > 3)$, $P(X = 2)$.

b) Représentez le diagramme des probabilités de *X*.

c) Représentez la fonction de répartition de *X*.

d) Exprimez les probabilités suivantes au moyen de la fonction de répartition
$P(1 < X \leq 3)$, $P(X > 3)$, $P(X = 2)$
de telle manière que les réponses soient valables pour toute distribution *X*.

§ 1.2 Moyenne, variance, écart-type

■ Espérance mathématique

En *Statistique descriptive*, nous avons vu que la moyenne empirique se calcule comme suit:

$$m = \sum_{i=0}^{k} x_i f_i$$

Maintenant nous remplaçons
la variable statistique par une <u>variable aléatoire</u> (= variable statistique théorique) notée *X*;
les fréquences par les <u>probabilités</u> (= fréquences théoriques);
la moyenne *m* par l'<u>espérance mathématique</u> (= moyenne théorique) notée μ, μ_X ou $E(X)$.
On obtient

$$\boxed{\mu_X = E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i p_i} \quad \text{ou} \quad \boxed{E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i \, p(X = x_i)}$$

<u>Théorème</u>

Pour des nombres réels a, b et des variables aléatoires quelconques X et Y, on a

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

Démonstration (facultatif)

Soit $E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i P(X = x_i)$; alors

$$E(aX+b) = \sum_{i=0}^{k} (a x_i + b) P(aX+b = a x_i + b) = \sum_{i=0}^{k} (a x_i + b) P(X = x_i) =$$

$$a\sum_{i=0}^{k} x_i P(X = x_i) + b\sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) = a\sum_{i=0}^{k} x_i P(X = x_i) + b = aE(X)+b$$

Soit $E(Y) = \sum_{j=0}^{m} y_j P\left(Y = y_j\right)$; fusionnons les modalités

$\{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m\} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$
avec les probabilités
$P(X+Y = z_r) =$
$P(X = x_i) + P\left(Y = y_j\right)$ s'il existe un i et un j tels que $z_r = x_i = y_j$;
$P(X+Y = z_r) = P(X = x_i)$ s'il existe un i tel que $z_r = x_i$
mais pas de j tel que $z_r = y_j$;
$P(X+Y = z_r) = P\left(Y = y_j\right)$ s'il existe un j tel que $z_r = y_j$
mais pas de i tel que $z_r = x_i$.

$$E(X+Y) = \sum_{r=0}^{n} z_r P(X+Y = z_r) = \sum_{i=0}^{k} x_i P(X = x_i) + \sum_{j=0}^{m} y_j P\left(Y = y_j\right) = E(X)+E(Y)$$

Exemple

Pour jouer au jeu suivant, il faut payer 1 Fr par partie. Une partie consiste à lancer une paire de dés. On gagne alors 3 Fr par six obtenu.
Quelle est l'espérance de gain net d'une partie ?

D'une part, G désigant le gain net d'une partie,

$G = -1$ avec prob. $\frac{25}{36}$
$G = 2$ avec prob. $\frac{10}{36}$
$G = 5$ avec prob. $\frac{1}{36}$

$$E(G) = \sum_{i=0}^{k} g_i P(G = g_i) = (-1)\frac{25}{36} + 2\times\frac{10}{36} + 5\times\frac{1}{36} = 0$$

D'autre part, X désigant le nombre de six obtenu en une partie,

$X = 0$ avec prob. $\frac{25}{36}$
$X = 1$ avec prob. $\frac{10}{36}$
$X = 2$ avec prob. $\frac{1}{36}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i\, P(X = x_i) = 0 \times \frac{25}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$G = 3X - 1$$

$$3E(X) - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 0$$

On a ainsi illustré la première formule du théorème précédent:

$$E(3X - 1) = 3E(X) - 1$$

Illustrons maintenant la deuxième formule. Notons U_1 le nombre de six donné par le premier dé:

$U_1 = 0$ avec prob. $\frac{5}{6}$
$U_1 = 1$ avec prob. $\frac{1}{6}$; $\quad E(U_1) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

et U_2 le nombre de six donné par le deuxième dé:

$U_2 = 0$ avec prob. $\frac{5}{6}$
$U_2 = 1$ avec prob. $\frac{1}{6}$; $\quad E(U_2) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

D'une part,

$$U_1 + U_2 = X; \qquad E(U_1 + U_2) = E(X) = \frac{1}{3}$$

D'autre part,

$$E(U_1) + E(U_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

On a ainsi illustré la deuxième formule du théorème précédent:

$$E(U_1 + U_2) = E(U_1) + E(U_2)$$

■ Variance

En *Statistique descriptive*, nous avons vu que la la variance se calcule comme suit:

$$v = \sum_{i=0}^{k} (x_i - m)^2 f_i$$

Maintenant nous remplaçons
  la variable statistique par une <u>variable aléatoire</u> (= variable statistique théorique) notée X;
  les fréquences par les <u>probabilités</u> (= fréquences théoriques);
  la variance empirique v par la <u>variance théorique</u> notée V, V_X ou $V(X)$.
On obtient

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=0}^{k} (x_i - E(X))^2 \, p_i}$$

Ecart-type

En *Statistique descriptive*, nous avons vu que l'écart-type se calcule comme suit:

$$s = \sqrt{v} = \sqrt{\sum_{i=0}^{k} (x_i - m)^2 \, f_i}$$

Maintenant nous remplaçons

la variable statistique par une variable aléatoire (= variable statistique théorique) notée X;

les fréquences par les probabilités (= fréquences théoriques);

l'écart-type empirique s par l'écart-type théorique noté σ, σ_X ou $S(X)$.

On obtient

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{k} (x_i - E(X))^2 \, p_i}}$$

Exercice 1.2 - 1

On définit une distribution de la manière suivante:

Modalités x_i	**Probabilités** p_i
0	$\frac{1}{10}$
4	$\frac{1}{5}$
6	$\frac{2}{5}$
9	$\frac{3}{10}$

a) Représentez graphiquement

* le diagramme à bâtons des probabilités;
* la fonction de répartition.

b) Calculez l'espérance mathématique, la variance théorique et l'écart-type théorique.

Exercice 1.2 - 2

On donne la variable aléatoire X définie par le tableau suivant

Modalités x_i	**Probabilités** p_i
1	0.3
2	0.4
3	0.2
4	0.1

Calculez l'espérance mathématique, la variance théorique et l'écart-type théorique.

- Exercice 1.2 - 3

Pour une tombola, on fait des paquets de 6 billets dans lesquels il y a deux billets gagnants.
Quelqu'un décide d'acheter les billets d'un paquet jusqu'à ce qu'il obtienne un billet gagnant.
Combien de billets peut-il s'attendre à acheter ?

- Exercice 1.2 - 4

Un club de football doit rencontrer successivement trois adversaires. On estime ses chances de gagner respectivement à 0.6, 0.2 et 0.4 et ses chances de faire match nul respectivement à 0.2, 0.3 et 0.4. Un match gagné rapporte 2 points, un match nul 1 point et un match perdu 0 point.

a) Quel nombre de points peut-on espérer pour chaque match ?
Pour les trois matches ?

b) Quelle est la probabilité que le club récolte au moins trois points ?

c) Quelle est la probabilité que le club récolte au moins trois points sachant qu'il a perdu son premier match ?

d) Quelle est la probabilité que le club ait perdu son premier match sachant qu'il a récolté au moins trois points ?

§ 1.3 Distribution de Bernoulli

On appelle distribution de Bernoulli une distribution qui ne prend que les deux valeurs 0 ou 1:

$$\begin{cases} X = 1 \quad (\text{réussite}) \quad \text{avec prob.} \quad p \\ X = 0 \quad (\text{échec}) \quad \text{avec prob.} \quad q = 1 - p \end{cases}$$

- Espérance mathématique

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i\, p_i = 0\, q + 1\, p = p$$

- Variance

$$V(X) = \sum_{i=0}^{k} (x_i - E(X))^2\, p_i = (0 - p)^2\, q + (1 - p)^2\, p = p^2\, q + q^2\, p = p\, q\, (p + q) = p\, q$$

- Ecart-type

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p\,q}$$

- Exemple

On lance un dé et on compte le nombre de six obtenus, c'est-à-dire

$$\begin{cases} X = 0 \text{ avec prob. } \frac{5}{6} \\ X = 1 \text{ avec prob. } \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\mu_X = E(X) = p = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = p\,q = \frac{1}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$\sigma_X = \sqrt{p\,q} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

- Exercice 1.3 - 1

Pour la distribution de Bernoulli

$$\begin{cases} X = 0 \text{ avec prob. } \frac{2}{3} \\ X = 1 \text{ avec prob. } \frac{1}{3} \end{cases}$$

a) représentez graphiquement
  * le diagramme à bâtons des probabilités;
  * la fonction de répartition;

b) calculez l'espérance mathématique, la variance théorique et l'écart-type théorique.

- Exercice 1.3 - 2

On lance 24 fois une paire de dés et on compte le nombre de double six obtenus.
Si l'on obtient au moins un double six, on gagne; sinon on perd.

Calculez l'espérance mathématique de gagner.
Calculez aussi la variance théorique et l'écart-type théorique.

§ 1.4 Distribution binomiale

- Exemple

On lance trois dés et on compte le nombre de six obtenus, c'est-à-dire

$$X = 0 \text{ avec prob. } \quad p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$X = 1 \text{ avec prob. } \quad p_1 = 3 \times \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$X = 2$ avec prob. $p_2 = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}$

$X = 3$ avec prob. $p_3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$

On peut interpréter cette variable aléatoire comme étant la somme de trois variables de Bernoulli indépendantes de même distribution

$$X = X_1 + X_2 + X_3 \quad \text{où} \quad \begin{cases} X_j = 0 \text{ avec prob. } \frac{5}{6} \\ X_j = 1 \text{ avec prob. } \frac{1}{6} \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Cette distribution est appelée distribution binomiale (3, $\frac{1}{6}$).

■ Généralisation

On appelle distribution binomiale (k, p) la somme de *k* variables de Bernoulli indépendantes de même distribution dont la probabilité de succès de chacune est *p*, c'est-à-dire

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k \quad \text{où} \quad \begin{cases} X_j = 0 \text{ avec prob. } p \\ X_j = 1 \text{ avec prob. } q = 1 - p \end{cases}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Le calcul des probabilités nous a appris que

$X = 0$ avec prob. $p_0 = C_0^k\, p^0\, q^k = q^k$

$X = 1$ avec prob. $p_1 = C_1^k\, p^1\, q^{k-1} = k\, p\, q^{k-1}$

$X = 2$ avec prob. $p_2 = C_2^k\, p^2\, q^{k-2}$

.. .. ..

$X = j$ avec prob. $\boxed{p_j = C_j^k\, p^j\, q^{k-j}}$

.. .. ..

$X = k - 1$ avec prob. $p_{k-1} = C_{k-1}^k\, p^{k-1}\, q^1 = k\, p^{k-1}\, q$

$X = k$ avec prob. $p_k = C_k^k\, p^k\, q^0 = p^k$

■ Espérance mathématique

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i\, p_i = k\, p$$

<u>Démonstration</u> : d'après le théorème du § 1.2,

$$E(x) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_k) = p + p + \ldots + p = k\, p$$

■ Variance

$$V(X) = \sum_{i=0}^{k} (x_i - E(X))^2\, p_i = k\, p\, q$$

<u>Démonstration</u> (facultative)

La démonstration de cette proposition sort du cadre de ce chapitre. Elle est basée sur la proposition suivante :

Si X et Y sont des variables <u>indépendantes</u>, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Les *k* variables de Bernoulli qui interviennent dans la distribution binomiale sont indépendantes. Donc,

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + ... + X_k) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_k) = p\,q + p\,q + ... + p\,q = k\,p\,q$$

- Ecart-type

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{k\,p\,q}$$

- Exercice 1.4 - 1

Pour le cas particulier *k* = 3, vérifiez les formules suivantes pour tout *p*:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=0}^{k} x_i\,p_i = k\,p$$

$$V(X) = \sum_{i=0}^{k} (x_i - E(X))^2\,p_i = k\,p\,q$$

$$\sigma_X = \sqrt{k\,p\,q}$$

- Exercice 1.4 - 2

On lance dix fois une pièce de monnaie.

a) Calculez la probabilité des événements suivants:
on a obtenu exactement 5 faces;
on a obtenu moins de 4 faces.

b) Quel est l'écart-type du nombre de faces ?